

AUGUSTO QUEIROZ

Professor da Faculdade de Ciências do Porto

JAYME RIOS DE SOUZA

Professor agreg. da Faculdade de Ciências do Porto

ROGÉRIO SOUSA NUNES

Assistente da Faculdade de Ciências do Porto

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA DESCRITIVA

TOMO I

HOMOLOGIA. PROJEÇÃO ORTOGONAL. AXONOMETRIA



PORTO EDITORA, LDA.

P. D. Filipa de Lencastre, 42

PORTO



(075.8)

**EXERCÍCIOS
DE
GEOMETRIA DESCRITIVA**

GEOMETRIA DESCRIPTIVA
DE LA
UNIVERSIDAD DE CHILE

AUGUSTO QUEIROZ

Professor da Faculdade de Ciências do Porto

JAYME RIOS DE SOUZA

Professor agreg. da Faculdade de Ciências do Porto

ROGÉRIO SOUSA NUNES

Assistente da Faculdade de Ciências do Porto

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA DESCRITIVA

TOMO I

HOMOLOGIA. PROJECCÃO ORTOGONAL. AXONOMETRIA



Barceliana
MUNICIPIO DE BARCELOS
BIBLIOTECA MUNICIPAL

Nº 51785

PORTO EDITORA, LDA.

P. D. Fillpa de Lencastre, 42

P O R T O

MUNICÍPIO DE BARCELONA

BIBLIOTECA MUNICIPAL

N.º 2178

COMPOSTO E IMPRESSO NA
EMPRESA INDUSTRIAL GRÁFICA DO PORTO, LIMITADA
EDIÇÕES MARÂNUS
174, R. MÁRTIRES DA LIBERDADE, 178 • TELEF. 20504

PREFÁCIO

Qual a razão de ser e qual a finalidade do livro que se apresenta?

O livro, que se apresenta, tem por base o «Curso de Geometria Descritiva» professado actualmente na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. De supor é, portanto, que seja sua finalidade servir os alunos da mesma Faculdade.

E, de facto, com tal intenção, quase exclusiva, foi elaborado e redigido.

Que possa constituir instrumento auxiliar para aquisição e domínio das teorias tratadas;

Que possa estabelecer modelo e padrão dos conhecimentos a adquirir;

Que possa, também, valer como pedra de toque para bom julgamento de provas a prestar;

Que, finalmente, possa servir de base de consciência para um auto-exame do exame que vai ser prestado ou já se prestou;

Tanto se teve em vista e se pretendeu atingir.

Seja afirmado, aqui, que o livro não aparece por desejo expresso ou vontade própria de quem dirige o curso.

Pressões de vária ordem, meio ambiente, certamente um tanto ou quanto de utopia, quiçá, também, louváveis desejos e certas esperanças em promover obra útil impuseram, terminantemente, o seu querer. A «Porto Editora» fechou a questão.

Desta forma, sobre pressão de circunstâncias de vária ordem, que não por deliberação própria e voluntariamente tomada, concretizando instâncias feitas e satisfazendo compromissos, iniciou-se a redacção e a elaboração do livro.

À «Porto Editora», que tornou possível e, finalmente, determinou semelhante empreendimento, são devidos os melhores agradecimentos.

O Livro, que se publica, não é livro que possa dizer-se de texto e que, por consequência, possa dispensar as lições orais feitas no curso. Não é, tão pouco, um simples livro de exercícios.

Primitivamente concebido como simples compilação duma vasta colectânea existente de exercícios passados em vários actos do curso, dos quais, alguns seriam tratados expressamente para servirem de modelo, o certo é que esta ideia se foi alargando; e, em breve, se pretendeu dar-lhe um maior alcance e extensão.

Este desvio verificado na sua finalidade não deixará de se tornar patente a um leitor atento, que, certamente, há-de notar certa falta de homogeneidade na sua contextura.

Por um lado, cedo se verificou que, para boa harmonia da compilação que se pretendia realizar, muito da colectânea existente tinha de ser revisto. Havia, agora, moldes a respeitar, para uniformidade do conjunto, que não estavam presentes quando os exercícios tinham sido passados. E este trabalho de revisão mostrava-se inglório e, como se compreende, ingrato.

Havia, também, matéria escrita que não era fácil enquadrar.

Pretender dar forma à publicação foi a tarefa que pouco a pouco se foi apresentando e resolvendo.

Deste modo, cedo se assentou em redigir um livro que, sem ser de molde a dispensar as lições orais, tivesse contudo, forma e contextura tais que pudesse desobrigar os alunos do ingrato trabalho de tirarem quaisquer apontamentos ou notas escritas do curso feito.

Pretende-se, agora, por consequência, que o livro preencha esta função:

Constitua, com as lições orais e ensinamentos dados nas aulas práticas, instrumento suficiente — sem necessidade de quaisquer notas ou apontamentos escritos — para completa preparação dos alunos e completo entendimento das matérias tratadas. E, para tanto, dispensou-se a melhor atenção em acentuar e destacar os princípios fundamentais e as ideias que dominam as teorias consideradas e desenvolvidas.

Crê-se que o desideratum posto tenha sido atingido.

Haja da parte dos alunos boa vontade e desejo firme de se instruírem, que o trabalho de preparação, que lhes é imposto, se tornará fácil e, porque não dize-lo, atraente mesmo.

Não quisemos descer a banalidades, porque, parece certo, que algum esforço é de exigir a quem se instrui, para bem mesmo duma melhor instrução.

Certamente, para o esforço que deve ser exigido, há um

limite mínimo e um limite máximo. Colocamos-nos entre os dois limites, com certeza muito afastados do máximo e não muito longe do mínimo, no ponto que nos pareceu mais apropriado ao desenvolvimento dos alunos, que deixaram o curso médio e estão no primeiro ano dum curso superior.

Qual a função e qual o assunto da Geometria Descritiva?

Certamente, as respostas, que poderão ser oferecidas, não serão concordantes, nem quanto à finalidade, nem quanto à ordenação da matéria, nem quanto, talvez, à terminologia.

Comecemos por recordar que a designação de Geometria Descritiva vem de Gaspar Monge, matemático francês do tempo da Revolução, e que Monge, mesmo, é considerado o verdadeiro fundador e pai da Geometria Descritiva.

E seja lembrado que, criando a Geometria Descritiva, Monge diz ter sido seu intento preencher os seguintes propósitos:

«Representar com exatidão por meio de desenhos que têm duas dimensões os objectos que têm três e que são capazes de definição rigorosa».

«Deduzir da descrição exacta dos corpos tudo o que segue necessariamente das suas formas e posições respectivas».

Com tal ponto de vista, Monge desenvolveu uma teoria apropriada que ficou conhecida pelo nome de Método ou Geometria de Monge e que constitui, ainda hoje, a parte fundamental dum curso de Geometria Descritiva.

Posteriormente, porém, questões de natureza especial, principalmente do domínio da Topografia, impuseram a criação dum novo método que é conhecido pelo nome de Método das Projecções Cotadas ou Geometria Cotada.

Depois, ainda, o desejo e a necessidade — realmente imperiosa — de construir desenhos, que fossem particularmente impressivos, levaram ao estabelecimento dum corpo de regras e princípios gerais, que constitui a chamada Perspectiva Aplicada.

Método de Monge, Método das Projecções Cotadas, Perspectiva Aplicada são os três marcos dum curso de Geometria Descritiva.

E, talvez, mesmo, se possa pensar que tal matéria constitua o último e único sujeito dum curso de Geometria Descritiva.

Queremos, porém, crer que há a considerar, fundamentalmente, para a Geometria Descritiva, um ponto de vista próprio e perfeitamente marcado, donde, e somente donde, é percebida em toda a sua plenitude, e que importa, portanto, tomar, para perfeita

compreensão da teoria, na sua verdadeira essência e na sua real extensão e significado.

Criando a Geometria Descritiva, parece ter sido, já, dominante em Monge, a ideia duma teoria cuja base e razão de ser estava, precisamente, no propósito declarado de desenhar com precisão e de tal modo que o desenho pudesse substituir o objecto representado.

E queremos crer que o ponto de vista próprio a tomar no estudo da Geometria Descritiva seja o de a considerar e tratar como Ciência do Desenho.

De modo especial, do desenho considerado na sua feição construtiva. O que não deve implicar, porém, que não seja, também, considerado no seu valor informativo e artístico.

Desenhar é uma das necessidades mais prementes da vida humana.

Quem alguma vez viveu no seu espírito um problema — seja uma realização material, seja uma realização meramente intelectual — e lhe encontrou a solução, com certeza, não pôde deixar de sentir em si o desejo vivo de tentar a construção do que sentiu e empreendeu. E será vão toda a tentativa de fechar a questão com uma exposição, por mais clara e bem dirigida que seja.

Construir parece ser o tema de ordem da vida humana.

Construir, segundo o consenso comum, significa uma das duas coisas :

Realização efectiva e integral do objecto considerado.

Realização duma maqueta ou miniatura feita em material plástico adequado.

Um espírito reflectido julgará, certamente, excessiva e não natural a exigência da realização integral e, por outro lado, deficiente, pouco próprio e de prática difícil o processo da modelação.

No recurso ao desenho, encontrou o espírito humano o melhor meio de resolver o problema da construção ; muitas vezes o único meio possível e sempre o mais próprio e perfeito.

A ideia de representar por figuras planas as figuras espaciais data, certamente, dos primórdios da civilização humana.

De estranhar é que só em época relativamente recente se estabelecessem bases científicas e o problema do desenho fosse cientificamente considerado.

Queremos, pois, crer que a Geometria Descritiva deve ser considerada, em sentido lato, como ciência do desenho. Ciência,

que pondera e analisa a necessidade e o valor do desenho, na triplíce função que lhe cabe desempenhar, construtiva, informativa e artística.

Não podemos, também, crer que o seu campo de acção se deva limitar às necessidades do homem puramente técnico.

Julgamos que a Geometria Descritiva é, igualmente, útil e necessária ao próprio ensino da matemática.

Deve o estudioso de matemática saber executar desenhos precisos e impressivos, e deve libertar-se do sentimento de inferioridade, que o oprimirá, quando sabe, precisamente, que determinado elemento que procura representar é unico e perfeitamente determinado e se vê, por falta de conveniente instrução, forçado a desenhá-lo livremente, mais ou menos ao acaso.

Queremos, assim, crer que o programa de Geometria Descritiva deve ter tal latitude que considere integralmente o problema do desenho, em todos os aspectos que possa oferecer. Não, evidentemente, do desenho à vista, à mão livre, dum objecto posto na nossa frente; mas do desenho de objecto que existe apenas no íntimo do nosso pensamento, em que todas as suas partes estão perfeitamente definidas e que nenhuma delas pode à mão livre ser marcada.

Embora seja corrente e tradicional iniciar-se um curso de Geometria Descritiva pelo estudo directo e immediato do Método de Monge, a verdade é que não seguimos tal caminho.

Com semelhante attitude, não queremos, porém, significar que não consideremos o Método de Monge como a parte fundamental dum curso de Geometria Descritiva.

Mas a verdade é que, em nenhuma obra existente, se formulam nitidamente os dois votos seguintes, que desejamos satisfazer e que animam e marcam por si mesmos o rumo a dar ao curso feito.

Em primeiro plano: — anima-nos o justo desejo de descobrir a possível unidade, junta à maior generalidade dos métodos e teorias que se apresentam.

Em segundo plano: — ser, tão cedo quanto possível, considerada e criticada a possibilidade, cientificamente concebida, de se efectuarem desenhos, que bem possam e melhor realizem as condições e fins desejados ou impostos. De estimar é, sem dúvida, que, tão cedo quanto possível, se estabeleçam os princípios e os meios adequados, que habilitem a bem julgar e correctamente executar os desenhos que se tornem recomendáveis ou mesmo

necessários para conveniente ilustração de teoria que se desenvolva, inclusive a do próprio curso de Geometria Descritiva.

Prestar a melhor atenção a estes votos é o tema dominante da orientação dada ao curso; e nesta circunstância reside, mesmo, o carácter mais incisivo e de maior expressão do curso feito.

A matéria correspondente constitui o objecto de diferentes capítulos que abrangem as seguintes rubricas:

Proposições de Incidência. Projecção — Ortogonal — Paralela Geral — Central. Homologia Afim — Elipse. Homologia não Afim — Cónicas. Projecção Ortogonal. Axonometria — Ortogonal — Paralela Geral.

E semelhante matéria pode e justamente deve ser considerada como início e introdução ao curso.

À parte o assunto relativo à rubrica Proposições de Incidência, que não foi considerado, é a matéria versada no 1.º tomo da obra que se publica.

Seja dito que é timbre do curso ser de feição elementar e de tal modo que, de duas soluções possíveis duma mesma questão, se aprecia e se prefere a mais elementar.

É, também, timbre do curso servir-se da terminologia mais usual, mais corrente e menos rebuscada. Não se empregam designações como paveia, estrela, etc.; e evita-se a introdução de novos termos ou novas formas de expressão, embora se mostrem adequadas e, de certo modo, impostas, para uma exposição mais conveniente de novos conceitos e de certas teorias que se apresentam.

Na rubrica «proposições de incidência», discutem-se e introduzem-se conceitos de «geometria projectiva», mas tão somente até ao ponto que, realmente, é exigido para conveniente exposição e melhor determinação da unidade e da generalidade dos métodos e teorias consideradas. Seria, de facto, impraticável, que não tivéssemos um conceito de espaço suficientemente lato, no qual, proposições como a de Desargues e de Pappus não pudessem ser enunciadas na sua forma geral possível. Mas tanto é apenas o que é exigido e foi considerado.

A rubrica deveria ser considerada no 1.º tomo da obra que se publica.

Deveria ser publicado um capítulo especial, onde não só se consideraria a referida matéria, como, também, se apresentariam notas e conselhos de ordem prática e se trataria da importante

questão da possibilidade se limitarem as construções a um espaço restrito, préestabelecido.

Dada a extensão que o volume tomou, tal capítulo não foi publicado.

A proposição bem conhecida, relativa às alturas dum triângulo, que afirma a concorrência destas num mesmo ponto, apesar do seu character elementar e aparentemente banal, ocupa lugar particularmente preponderante no desenvolvimento do curso, pelo que, aqui, lhe deve ser feita uma referência especial.

Nela se encontra, de facto, o meio próprio de dar feição elementar às teorias desenvolvidas e, na sua larga e generalizada aplicação, reside, mesmo, pode dizer-se o character fundamental da orientação dada ao curso.

E queremos crer que tão deliberado propósito, como o que nos anima, de sistematicamente a utilizar, se não mostra em nenhuma obra existente.

Empregada, já, na teoria da construção em espaço restrito, em problemas que envolvem elementos fora dos limites preestabelecidos, é, depois, sistematicamente utilizada como meio normal de resolução de questões métricas de ordem geral.

Seja-nos permitido citar alguns passos.

Pelo que respeita à métrica euclidiana, do plano e do espaço, abrangem-se, respectivamente, por seu meio, de modo elementar, os conceitos de involução e polaridade absolutas.

Pelo que respeita a figuras planas, estabelece-se a seguinte proposição :

A forma duma figura plana fica determinada apresentando uma sua projecção (ortogonal, paralela geral ou central ¹⁾) e dando as medidas de dois dos seus ângulos.

Por outras palavras. A partir duma projecção dada, pode construir-se uma figura semelhante à figura considerada, desde sejam fixadas as medidas de dois dos seus ângulos.

Pelo que respeita a figuras do espaço :

Uma projecção (ortogonal, paralela geral ou central) e três

⁽¹⁾ Cumpré fazer uma ligeira reflexão. Em projecção paralela, com o fixar-se a projecção duma recta, fixa-se, simultâneamente, a projecção do ponto do infinito da recta considerada — ou seja o seu ponto de fuga. Para estabelecer a analogia, no caso de projecção central, deve entender-se que, com as projecções das rectas consideradas, sejam, também, fixados os seus pontos de fuga.

pares de ângulos em três planos distintos, um par em cada plano, determinam a forma da figura projectada e podem ser postas e resolvidas questões de grandeza relativa — ou seja o problema de comparação de grandezas.

Por que a Geometria Descritiva opera com projecções, e a projecção duma circunferência é uma cónica, as cónicas em geometria descritiva, de certo modo, equivalem à circunferência da geometria ordinária. Impõe-se, portanto, em geometria descritiva, o estudo das cónicas.

No estudo que é feito, as cónicas são definidas como imagens duma circunferência: em homologia afim no caso da elipse, em homologia não afim, no caso geral.

A teoria — centro, diâmetros e eixos — é desenvolvida elementarmente, sem qualquer referência ao conceito de polaridade.

Base da teoria desenvolvida é a proposição fundamental que exprime as condições necessárias e suficientes para que uma circunferência se transforme em circunferência.

Desta proposição, segue quase imediatamente a proposição seguinte:

Numa homologia insolutiva, uma circunferência, que se transforme em circunferência, transforma-se, necessariamente, em si mesma.

Este resultado, que, realmente, se pode considerar como equivalente ao conceito de polaridade, marca e inspira, de modo inteiramente natural, o caminho a seguir e os passos a realizar.

A projecção ortogonal é largamente apreciada do ponto de vista do seu real valor como meio de desenho.

De todas as formas de projecção, é a que permite desenhos com melhor character. Para serviços puramente técnicos ou meramente científicos, é a forma de projecção que deve ser preferida e recomendada.

Toda a teoria desenvolvida assenta nos princípios, que se podem dizer fundamentais, relativos à projecção ortogonal dum ângulo recto em ângulo, igualmente, recto.

Estes princípios são estabelecidos como consequência immediata do princípio, por assim dizer, manifesto, que, no caso de homologia afim, ortogonal, se esta se não reduzir a simetria, afirma que, das duas direcções perpendiculares que se mantêm perpendiculares, uma delas é, necessariamente, a direcção do eixo de homologia.

No estudo feito, é tratada em pormenor a proposição fundamental seguinte:

A forma e a projecção ortogonal determinam a figura.

O problema correspondente, de construção da figura representada, é tratado de modo que se reduz à aplicação imediata do princípio que, no caso dum ângulo recto se projectar em ângulo recto, afirma ser um dos lados do ângulo paralelo ao plano de projecção.

Sobre a forma por que é tratado o teorema de Polke, merece, aqui, ser feita uma referência especial.

Falando de modo geral, em projecção ortogonal, a projecção dum sistema de eixos ortogonais determina a posição do sistema (à parte uma translação em direcção normal ao plano de projecção). O mesmo não acontece no caso geral de projecção paralela.

Nada há de surpreendente na diferença de resultados. As situações são inteiramente diferentes. Com afirmar-se projecção ortogonal, determina-se, de maneira unívoca, a forma de projecção considerada, o que não sucede com afirmar-se simplesmente projecção paralela.

De supor é que, com a caracterização da projecção paralela feita, resulte, igualmente, que a projecção determine a posição do sistema.

É o que, realmente, se verifica.

Dando uma projecção paralela dum sistema de eixos ortogonais e um plano normal à direcção da projecção (triângulo normal, na teoria desenvolvida), fica determinada a posição do sistema.

O teorema de Polke, de certo modo, nada mais é do que uma proposição equivalente à que fica apontada.

Com o fim de instruir sobre a orientação dada ao curso e pelo carácter pessoal que revestem, algumas notas queremos, ainda, aqui, apontar.

A desejável unidade da teoria resultará duma boa discriminação das questões tratadas, quanto à sua natureza.

Em primeiro lugar, há que fazer uma perfeita separação entre questões de incidência e questões métricas.

Sobre questões métricas, há que separar as questões de distância das questões de ângulos.

Sobre questões de distância, há que fazer, ainda, uma discriminação em duas ordens de questões: questões de grandeza relativa e questões de grandeza absoluta.

Pela natureza elementar do curso, questões de ordem (topológicas) e de continuidade não são discutidas. São consideradas intuitivamente.

Questões de incidência são exclusivamente tratadas por métodos que não envolvem qualquer consideração métrica e que são igualmente aplicáveis seja qual for o lugar e a situação em que nos encontremos.

É posto em realce que, em «projecções cotadas», questões de incidência são independentes da unidade estabelecida para as cotas e devem ser resolvidas, conseqüentemente, sem intervenção da unidade, quando, já fixada, ou de qualquer unidade que, embora a título precário, se estabeleça.

Igualmente, se põe em realce que, em «perspectiva construtiva», questões de incidência não exigem a fixação do ponto principal nem da circunferência de distância.

Bissectar, trissectar, etc., de modo geral, dividir um segmento em qualquer número de partes iguais ou numa razão dada (racional ou irracional); duplicar, triplicar, de modo geral, multiplicar por qualquer número (inteiro, fraccionário ou irracional) um segmento; transportar um segmento sobre uma recta; comparar segmentos duma mesma recta — ou seja o problema de medir um segmento por um outro da mesma recta — são problemas que, no caso de projecção paralela, são triviais e dos quais, muitas vezes mesmo, nenhuma referência se faz. Isto resulta de que a projecção paralela mantém a razão de dois segmentos da mesma recta e que, portanto, segmentos iguais têm projecções iguais.

No caso de projecção central, os mesmos problemas não são triviais.

Mas, à parte a trivialidade ou não trivialidade, haverá essencial diferença entre os dois casos?

A resposta a dar é negativa. Mas há que fazer uma reflexão.

Com o fixar-se a projecção duma recta, no caso de projecção paralela, fixa-se, também, a projecção do seu ponto do infinito, isto é, o ponto de fuga da recta, que é o ponto do infinito da projecção. Para se estar em igual posição, no caso de projecção central, é preciso que, juntamente com a projecção da recta, se

fixe, igualmente, o seu ponto de fuga. E dada, em projecção central, a projecção duma recta e o seu ponto de fuga, sem necessidade de qualquer outro elemento — traço, ponto principal, circunferência de distância, etc. — os referidos problemas — de grandeza relativa — podem ser propostos e resolvidos.

No curso é apresentada a respectiva teoria, que assenta num estudo, convenientemente feito, do problema do transporte dum segmento sobre uma recta e do problema da divisão dum segmento em partes iguais.

Como em projecção paralela, também, em projecção central, se pode resolver o problema do transporte dum segmento, duma para outra de duas rectas paralelas, ou seja o problema de comparar dois segmentos em rectas paralelas ou de medir um dos segmentos pelo outro. É questão, apenas, de estar fixado o ponto de fuga comum das rectas.

Com igual critério, se comparam e se tratam os problemas gerais de grandeza relativa — de transporte — de comparação e de medida relativa — no plano e no espaço.

A este propósito, convém fazer, aqui, uma referência especial, relativa à teoria da axonometria.

Há que reconhecer uma diferença intrínseca entre axonometria paralela (ortogonal, ou paralela geral) e axonometria central.

A diferença reside no facto de que, em axonometria paralela, o plano do infinito é projectante (contém o centro de projecção) e não o é em axonometria central.

Esta diferença é decisiva. Por ela se explica que possa acontecer que, em projecção central, como em projecção ortogonal, com a simples fixação duma projecção (incluindo, naturalmente, os pontos de fuga dos respectivos eixos) se possam tratar problemas de grandeza relativa no espaço e que o mesmo não suceda em projecção paralela.

Sobre problemas de grandeza absoluta, queremos, apenas, apontar um passo da teoria. Referimo-nos ao problema de determinar o verdadeiro comprimento dum segmento que existe numa recta paralela ao plano de projecção.

Em projecção ortogonal ou paralela geral, a questão é trivial; o verdadeiro comprimento é, também, o comprimento apresentado em projecção. Se em projecção central não é trivial, não deve, contudo, ser essencialmente diferente, quanto à sua primitividade.

De facto, a determinação do verdadeiro comprimento pode

ser feita sem a intervenção de qualquer elemento estranho — ponto principal, circunferência de distância.

No curso, o problema é resolvido, levando por translação o segmento considerado a assentar no plano de projecção.

Sob a designação de «método das figuras semelhantes», apresenta-se no curso um método de muita generalidade e de grandes possibilidades, ao qual, aqui, queremos, também, fazer referência.

É um método de construção, que se utiliza em duplo sentido — em sentido da própria figura representativa ou em sentido da figura representada.

O método consiste em construir uma figura, da qual, apenas, é exigido ser semelhante à figura representada.

A essência do método reside apenas na forma como a construção é feita; com a consideração de segmentos que se transportam simplesmente a compasso duma figura para a outra.

O método é, essencialmente, indicado para a resolução de problemas de grandeza relativa. Desde que se conheça, porém, o verdadeiro comprimento dum segmento da figura representada, pode ser aplicado de modo a fornecer a solução de qualquer problema de grandeza absoluta, que se proponha.

É capaz de aplicações muito diversas e em circunstâncias muito diferentes.

Renovando os agradecimentos devidos à Porto Editora, queremos, também, aqui, deixar expressa uma palavra de reconhecimento e estima para os artífices que compuseram e imprimiram a obra, que, pressurosamente e com a melhor vontade de bem satisfazer, sempre nos atenderam.

CAPÍTULO I

HOMOLOGIA

INTRODUÇÃO:

Homologia plana — é uma transformação pontual que satisfaz às seguintes condições:

- 1.^a — É directa e inversamente unívoca;
- 2.^a — Admite como elementos autocorrespondentes (duplos) todos os pontos duma recta;
- 3.^a — Transforma rectas em rectas.

A existência duma recta de elementos autocorrespondentes acarreta a existência dum feixe de rectas autocorrespondentes (duplas). O centro deste feixe é, necessariamente, ponto duplo.

Eixo da homologia — é a recta cujos pontos são todos duplos.

Centro da homologia — é o centro do feixe cujas rectas são todas duplas.

Relativamente à forma da homologia podem dar-se as seguintes hipóteses:

- a) *Centro impróprio* — *homologia afim*;
- b) *Centro próprio* — *homologia não afim*.

Se o eixo é impróprio, a homologia denomina-se *homotetia*; se o eixo e o centro são impróprios, a homologia denomina-se *equipolência*.

- São pontos duplos duma homologia:
- a) o centro da homologia;
 - b) qualquer ponto do eixo da homologia.

Não existem outros pontos que sejam duplos.

- São rectas duplas duma homologia:
- a) o eixo da homologia;
 - b) qualquer recta que passe pelo centro da homologia.

Não existem outras rectas que sejam duplas.

Uma recta AA' , que una um ponto A , não duplo, com o seu correspondente A' , é, necessariamente, recta dupla e passa pelo centro da homologia.

O ponto de intersecção aa' duma recta a , não dupla, com a sua correspondente a' é, necessariamente, um ponto duplo e pertence ao eixo da homologia.

Uma homologia fica determinada dando um ponto A , não duplo, e o seu correspondente A' , o eixo e o centro; mas, o centro tem de ficar na recta AA' e é claro que nem o centro pode coincidir com qualquer dos pontos, nem o eixo pode passar por qualquer deles.

Uma homologia fica, também, determinada dando uma recta a , não dupla, e a sua correspondente a' , o eixo e o centro; mas, o eixo tem de passar pelo ponto aa' e é claro que nem o eixo pode coincidir com qualquer das rectas, nem o centro estar em qualquer delas.

É de notar que, compondo homologias com o mesmo eixo, se obtém uma homologia, e que o eixo da homologia resultante é o eixo comum das homologias que se compõem.

Compondo homologias com o mesmo centro, obtém-se, também, uma homologia, e o centro da homologia resultante é o centro das homologias que se compõem.

Um problema corrente é o problema seguinte:

Determinar uma homologia que transforme uma figura Φ numa figura Φ' que apresente certas características que lhe são impostas.

Homologia afim

Em homologia afim, pontos do infinito são transformados em pontos do infinito; por outras palavras, mantém-se o paralelismo.

Chama-se *característica* duma homologia afim, o valor da razão das ordenadas oblíquas de dois pontos correspondentes.

Homologia afim concordante — pontos correspondentes não são separados pelo eixo (característica positiva).

Homologia afim discordante — pontos correspondentes são separados pelo eixo (característica negativa).

Uma homologia afim fica determinada dando; *a*) o seu eixo; *b*) um ponto A , não duplo, e o seu correspondente A' ; porque o centro tem de ser, então, o ponto do infinito da recta AA' , que une os pontos correspondentes dados.

Homologia ortogonal: Rectas que unem pontos, não duplos aos seus correspondentes ou são paralelas ou coincidem. A homologia diz-se ortogonal se estas rectas forem perpendiculares ao eixo de homologia. Numa *homologia ortogonal*, portanto, o eixo é uma recta ordinária e o centro, o ponto do infinito das rectas perpendiculares ao eixo.

Homologias especiais: *a*) *Simetria*, que é uma homologia ortogonal, discordante e de característica igual a -1 ; *b*) *Equipolência*, homologia já referida na introdução, na qual tanto o centro como o eixo são elementos do infinito.

Por definição, mesmo, uma homologia afim conserva o paralelismo; — o *ser paralelo* mantém-se.

Conserva-se, também, a razão de dois segmentos da mesma recta ou que fiquem em rectas paralelas; — o *ser ponto médio* dum segmento, o *dividir* um segmento em partes iguais são propriedades que se mantêm.

Numa homologia afim, a razão das áreas de duas figuras, também, não é alterada.

É constante a razão da área de qualquer figura para a área da figura correspondente, e esta razão é igual à *característica*.

Uma homologia afim, que conserve as áreas, diz-se *equi-afim*.

Em homologia afim apresentam-se, correntemente, problemas sobre ângulos e, em homologia afim, problemas de ângulos podem sempre reduzir-se ao caso de *ângulos com o mesmo vértice*.

a) Pode sempre transformar-se qualquer ângulo num ângulo de medida dada. Este problema admite sempre soluções e em número infinito;

b) Pode tentar-se o problema de transformar, simultaneamente, dois ângulos em ângulos de medida dada. Este problema já é determinado e pode, mesmo, não ter solução;

c) Caso particular do problema precedente é o problema de transformar, simultaneamente, dois ângulos, essencialmente distintos (sem lados comuns), em ângulos rectos. O problema tem solução e, de certo modo, unívocamente determinada, se os lados dum dos ângulos forem separados pelos lados do outro. Caso contrário, o problema é impossível.

O problema c) é fundamental. Grande número de problemas podem reduzir-se ao problema de transformar, simultaneamente, dois ângulos em ângulos rectos.

Merece, também, especial atenção pela sua importância, teórica e prática, o problema:

Determinar rectas perpendiculares que tenham como correspondentes rectas, igualmente, perpendiculares.

A não ser que se trate de *homologias especiais, simetria* ou *equipolência*, homologias que conservam a medida dos ângulos, em cada ponto, podem-se construir duas rectas perpendiculares, e duas sòmente, cujas imagens são, igualmente, rectas perpendiculares.

Projectão paralela:

Sejam: α e π planos não paralelos, sendo π tomado para plano de projectão; t , o traço de α em π ; $A, B, C, \dots$, pontos do plano α ; $A', B', C', \dots$ as projectões paralelas dos pontos $A, B, C, \dots$, respecti-

vamente; (A) , (B) , (C) , ..., os rebatimentos dos pontos A , B , C , ... respectivamente.

A correspondência, entre o rebatimento e a projecção paralela de qualquer ponto do plano α , é uma homologia afim, que tem por eixo o traço t do plano α .

Há íntima relação entre projecção paralela e homologia afim. Figuras que se correspondam em homologia afim, também se podem obter uma da outra por projecção paralela.

Reciprocamente, figuras planas, que sejam uma projecção

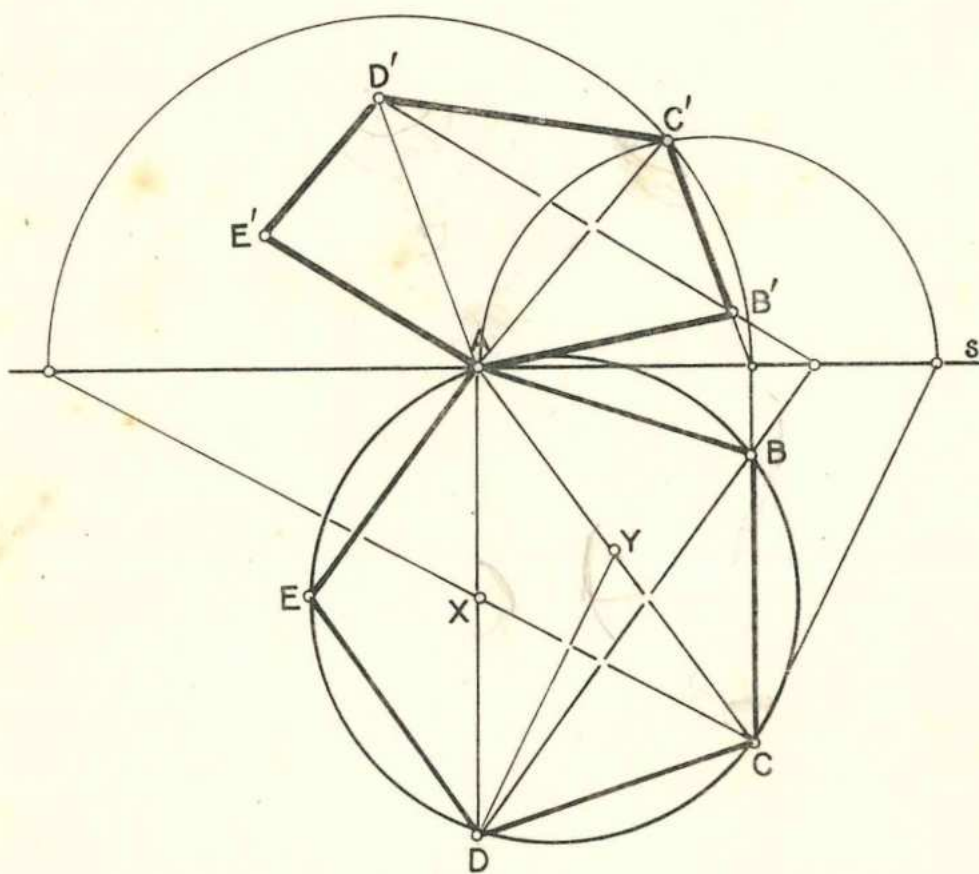


Fig. 1

paralela da outra, também, se podem transformar, uma na outra, por homologia afim.

O problema de construir uma projecção paralela duma figura plana reduz-se a um problema de homologia afim.

Exercícios resolvidos:

1 — *Desenhar (fig. 1) um pentágono regular ABCDE inscrito numa circunferência de 2,5 cms de raio; traçar, depois, as diago-*

nais AC e AD ; tirar, finalmente, a perpendicular em A à diagonal AD e designar esta perpendicular por s .

Determinar um pentágono $A'B'C'D'E'$ afim do pentágono desenhado, nas condições seguintes:

- O eixo de afinidade é a recta s ;
- As diagonais $A'C'$ e $A'D'$ são bissectrizes dos ângulos em C' e D' .

Supondo o problema resolvido, verifica-se: a) $\hat{A'C'D'} = \hat{A'C'B'}$, por hipótese; b) $AD \parallel BC$, portanto, $A'D' \parallel B'C'$, donde, $\hat{C'A'D'} = \hat{A'C'B'}$.

Por consequência, $\hat{A'C'D'} = \hat{C'A'D'}$. Do mesmo modo se deduz: $\hat{C'D'A'} = \hat{C'A'D'}$.

Logo, o triângulo $A'C'D'$ é equilátero. O problema reduz-se a transformar o triângulo ACD num triângulo equilátero.

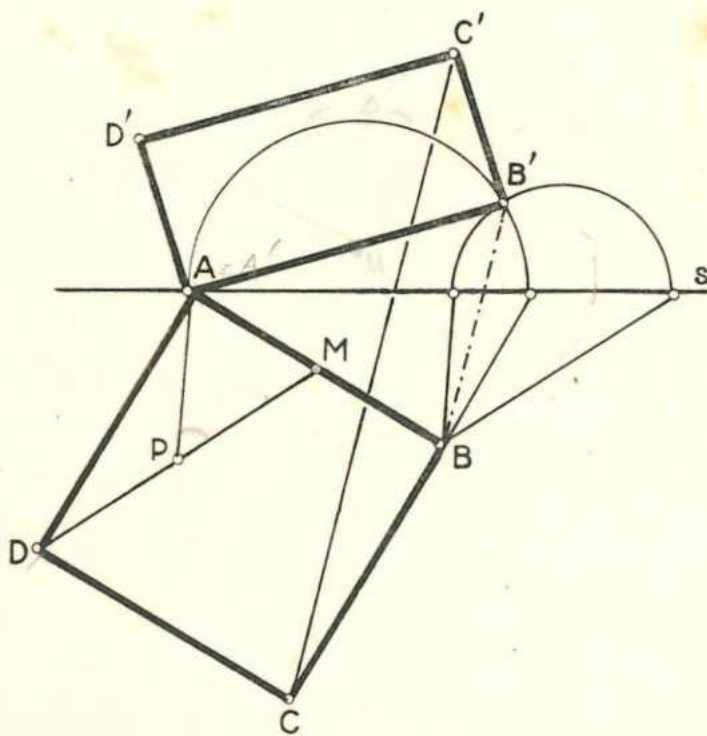


Fig. 2

Tomaram-se os pontos médios X e Y dos lados AD e AC e transformaram-se em rectos os ângulos $\hat{A'XC}$ e $\hat{A'YD}$.

II — Fixar (fig. 2) uma recta s e nesta um ponto A . Desenhar, em seguida, um quadrado $ABCD$, de lado igual a 3 cms, com um vértice no ponto A e formando o lado AB 30° com a recta s .

Transformar por afinidade de eixo s o quadrado desenhado num rectângulo $A'B'C'D'$, no qual seja o lado $A'B'$ duplo do lado $A'D'$.

Designando por M o ponto médio do lado AB , o triângulo MAD transforma-se num triângulo rectângulo isósceles.

Temos assim dois ângulos $M\hat{A}D$ e $M\hat{P}A$ que se transformam em ângulos rectos, o que permite determinar B' .

III — *Desenhar (fig. 3) uma projecção paralela dum trapézio rectângulo nas condições seguintes:*

- Base maior do trapézio, igual a 5 cms; base menor e altura, iguais a 3 cms;*
- O plano do trapézio é perpendicular ao plano de projecção;*
- O vértice do ângulo agudo está no plano de projecção;*

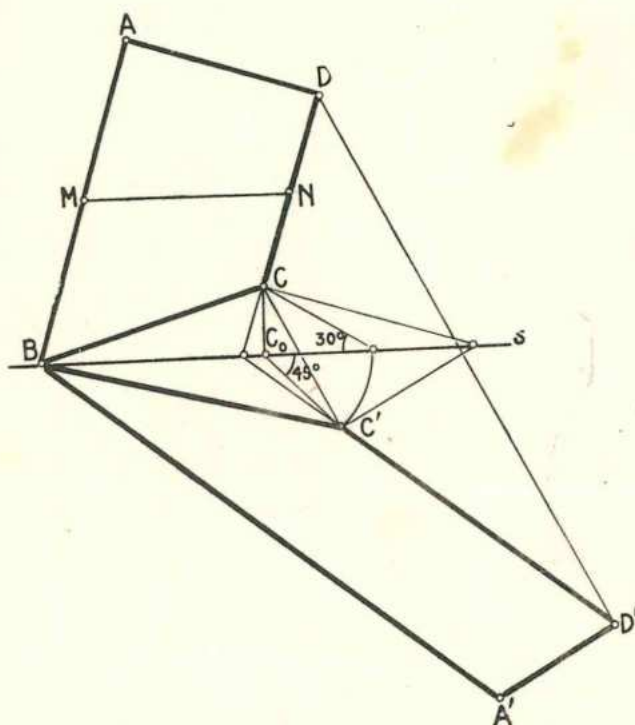


Fig. 3

- A recta que une os pontos médios das bases é paralela ao plano de projecção;*
- As projectantes fazem com o plano de projecção 30° ;*
- As projecções ortogonais das projectantes fazem 45° com o traço do plano do trapézio.*

Para determinar a projecção paralela C' do vértice C , conhece-se a projecção ortogonal C_0 de C , assim como a projecção ortogonal C_0C' da projectante CC' e o triângulo rectângulo CC_0C' .

Determinado C' , fica definida a afinidade que transforma o trapézio $ABCD$ dado no trapézio $A'B'C'D'$ pedido.

Exercícios

1. Fixar três pontos O, X, Y , sendo o triângulo OXY rectângulo em O , com a hipotenusa XY igual a 8 cms e o cateto OX igual a 4 cms.

Desenhar, em seguida, o quadrado $ABCD$, de diagonais iguais a 6 cms, com os vértices A e C na recta OX e os vértices B e D na recta OY .

Transformar por afinidade, com a recta XY para eixo, o quadrado desenhado num losango com os ângulos agudos iguais a 60° .

[Notar que o triângulo ABC se transformará num triângulo equilátero].

2. Desenhar um pentágono $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 2,5 cms de raio. Traçar a diagonal AC e tirar no vértice A a perpendicular s a esta diagonal.

Desenhar um pentágono afim do pentágono desenhado, nas condições seguintes :

- a) Deve ser da mesma área ;
- b) O eixo de afinidade deve ser a perpendicular s à diagonal AC ;
- c) O ângulo homólogo do ângulo em A deve ser recto.

3. Fixar uma recta s e nesta um ponto A . Desenhar, em seguida, um quadrado $ABCD$ de lado igual a 3 cms, com um vértice no ponto A e formando o lado AB , 30° com a recta s .

Determinar o losango de área máxima em que se pode transformar por afinidade de eixo s o quadrado desenhado.

4. Fixar duas rectas s e d que façam 60° .

Fixar, em seguida, na recta d dois pontos A e $\bar{A}$.

Considerar a afinidade de eixo s na qual A e $\bar{A}$ são pontos correspondentes.

Construir um ângulo de 60° de vértice em A a que corresponda um ângulo de 60° , de vértice em $\bar{A}$.

5. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 5 cms de lado.

Designar por M o ponto médio do lado BC .

Unir o vértice A ao ponto M e traçar a recta s , perpendicular em A , à recta obtida AM .

Construir um paralelogramo $A'B'C'D'$ afim e com metade da área do quadrado $ABCD$, nas condições seguintes :

- a) O eixo de afinidade é a recta s ;

b) A correspondente $A'M'$ da recta AM , é bissectriz do ângulo $B'A'D'$.

Nota: observar que o triângulo $A'B'M'$ é isósceles.

6. Desenhar um quadrado $ABCD$ de 5 cms de lado.

Designar por M o ponto médio do lado BC .

Unir o vértice A ao ponto M e traçar a recta s , perpendicular em A , à recta obtida AM .

Construir um rectângulo $A'B'C'D'$ afim do quadrado $ABCD$ nas condições seguintes:

a) A recta s é o eixo de afinidade;

b) A correspondente $A'M'$ da recta AM é a bissectriz do ângulo $B'A'D'$.

Nota: Observar que o triângulo $A'B'M'$ é isósceles.

7. Desenhar um triângulo ABC , rectângulo em A , cujos catetos meçam 3 e 5 centímetros.

Traçar a mediana do triângulo que passa pelo vértice A . Tirar neste mesmo vértice A a perpendicular à mediana traçada e designar esta perpendicular por s .

Desenhar o triângulo afim do triângulo ABC nas condições seguintes:

a) O eixo de afinidade deve ser s ;

b) O triângulo pedido deve ser equilátero.

8. Desenhar um pentágono regular $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 2,5 cms de raio.

Traçar a diagonal AC e tirar no vértice A a perpendicular s a esta diagonal.

Desenhar um pentágono afim do pentágono desenhado, nas condições seguintes:

a) O eixo de afinidade deve ser a perpendicular s à diagonal AC ;

b) Os ângulos homólogos dos ângulos em A e B devem ser rectos.

9. Fixar três pontos O , X e Y , sendo o triângulo OXY rectângulo em O , com a hipotenusa XY igual a 8 cms e o cateto OX igual a 4 cms.

Desenhar, em seguida, o quadrado $ABCD$, de diagonais iguais a 6 cms, que tenha para centro o ponto O , com os vértices A e C na recta OX e os outros dois vértices, B e D , na recta OY .

Transformar por afinidade, com a recta XY para eixo, o quadrado desenhado num rectângulo cujas diagonais façam 60° .

10. Desenhar um paralelogramo cujas diagonais meçam 5 cms e 4 cms e façam um ângulo de 60° .

Determinar um losango, afim do paralelogramo desenhado, nas condições seguintes:

a) O eixo de afinidade é perpendicular à diagonal maior do paralelogramo;

b) Os ângulos agudos do losango devem medir 45° .

11. Desenhar um trapézio rectângulo $ABCD$ com os seguintes dados: base maior, AB , igual a 5 cms; base menor, CD , igual a 3 cms; lado perpendicular às bases, AC , igual a 3 cms.

Designar por s a recta conduzida por B , sem pontos interiores ao trapézio, que faz 30° com a base AB .

Determinar a afinidade ortogonal que tem para eixo a recta s e tal que transforme o trapézio desenhado num trapézio isósceles e desenhar, finalmente, este último trapézio.

Nota: Lembra-se que, num trapézio isósceles, a recta que une os pontos médios das bases é perpendicular a estas.

12. Desenhar um triângulo ABC , rectângulo em A , cujos catetos AB e AC meçam 4 e 6 cms, respectivamente.

Tomar em B a perpendicular p à hipotenusa BC .

Determinar um triângulo $A'B'C'$, afim do triângulo ABC , nas condições seguintes:

a) O eixo da afinidade é a recta p ;

b) O triângulo $A'B'C'$ deve ser isósceles e rectângulo em A' .

13. Desenhar um trapézio isósceles, medindo a base maior 6 cms; a base menor e cada um dos lados não paralelos, 3 cms.

Designar os vértices que ficam na base maior por A e B . Tirar a perpendicular s em A à diagonal que passa neste vértice.

Determinar um trapézio afim do trapézio desenhado, nas condições seguintes:

a) O eixo de afinidade seja a recta s ;

b) As suas diagonais sejam perpendiculares;

c) O ângulo em A' , correspondente ao ângulo em A , seja recto.

14. Desenhar um hexágono regular $A'B'C'D'E'F'$ de 3 cms de lado.

Traçar em D' a perpendicular s à diagonal $A'D'$.

Construir o hexágono $ABCDEF$ afim do hexágono desenhado, nas condições seguintes:

- a) O eixo de afinidade é a recta s ;
- b) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ em A e B meçam, respectivamente, 90° e 45° .

15. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes dimensões:

Base maior, igual a 7 cms; base menor e altura, iguais a 4 cms.

No vértice do ângulo recto, da base maior, tirar a perpendicular s à diagonal que passa pelo mesmo vértice.

Construir um trapézio afim do trapézio desenhado, nas condições seguintes:

- a) O trapézio é isósceles;
- b) Os ângulos agudos medem 45° ;
- c) O eixo de afinidade é a recta s .

16. Desenhar um trapézio rectângulo, sendo: base maior, igual a 5 cms; base menor e altura, iguais a 3 cms.

Designar por B , o vértice do ângulo agudo; por C , o vértice do ângulo obtuso; por A , o vértice oposto a C ; por D , o vértice oposto a B .

Construir um trapézio nas seguintes condições:

- a) É afim do trapézio desenhado;
- b) O eixo de afinidade é a paralela a AC , tirada por B ;
- c) O trapézio é isósceles e tem as diagonais perpendiculares.

17. Desenhar um pentágono regular $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 3 cms de ~~diâmetro~~ *raio*.

Traçar as diagonais AD e BE e tirar a perpendicular em A à diagonal AD .

Determinar um pentágono $A'B'C'D'E'$, afim do pentágono desenhado, nas condições seguintes:

- a) O eixo de afinidade é a perpendicular tirada em A à diagonal AD ;
- b) O trapézio isósceles, formado pela diagonal BE e pelos lados BC , CD e DE do pentágono, deve transformar-se, pela afinidade, num trapézio que seja isósceles e tenha os lados não paralelos iguais, precisamente, à base maior.

18. Desenhar um pentágono regular $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 5 cms de diâmetro.

Traçar as diagonais AD e BE e tirar a perpendicular em A à diagonal AD .

Determinar, em seguida, um pentágono $A'B'C'D'E'$, afim do pentágono desenhado, nas condições seguintes :

a) O eixo de afinidade é a perpendicular, tirada em A , à diagonal AD ;

b) O trapézio isósceles, formado pela diagonal BE e pelos lados BC , CD e DE do pentágono, deve ser transformado pela afinidade um trapézio que seja rectângulo e tenha a sua base menor igual ao lado oblíquo às bases.

19. Desenhar um triângulo $A'B'O'$, sendo $A'B'$ igual a $B'O'$ igual a 4 cms e $A'D'$, igual a 5 cms. Designar por C' o ponto médio do lado $A'O'$ e traçar o segmento $C'B'$.

Supondo que o triângulo $A'B'C'$ seja projecção paralela dum triângulo equilátero ABC e que O' seja a projecção dum ponto O do plano deste triângulo, determinar o paralelogramo em que se projecta o quadrado, de lado igual ao lado do triângulo ABC , que tem para centro o ponto O e cujas diagonais estão nas bissectrizes do ângulo AOB .

[Nota: O paralelogramo pedido é figura afim dum quadrado, convenientemente desenhado, numa afinidade que transforme um triângulo equilátero no triângulo $A'B'C'$].

20. Desenhar um trapézio rectângulo, tendo de base maior 5 cms; de altura e de base menor, 3 cms.

Designar: por A , o vértice do ângulo obtuso; por C , o vértice oposto a A ; por B , o vértice do ângulo agudo; por D , o vértice oposto a B .

Desenhar uma projecção paralela oblíqua $A'B'C'D'$ do trapézio considerado, nas condições seguintes :

a) O plano do trapézio é perpendicular ao plano de projecção;
b) O lado CD é paralelo ao plano de projecção;
c) As projectantes são perpendiculares ao lado AB e fazem 45° com o plano de projecção.

Suponha-se o vértice B no plano de projecção.

21. Desenhar um trapézio rectângulo, tendo de base maior 5 cms; de base menor e de altura, 3 cms.

Designar por A , o vértice do ângulo obtuso; por C , o vértice oposto a A ; por B , o vértice do ângulo agudo; por D , o vértice oposto a B .

Desenhar uma projecção paralela oblíqua do trapézio considerado, nas condições seguintes :

- a) Ângulo do plano do trapézio com o plano de projecção, 60° ;
- b) A diagonal AC é paralela ao plano da projecção;
- c) As projectantes são perpendiculares à diagonal AC e fazem 45° com o plano de projecção.

Suponha-se o vértice B situado no plano de projecção.

22. Determinar uma projecção paralela $A'B'C'D'$ dum rectângulo $ABCD$, nas condições seguintes :

- a) As diagonais do rectângulo medem 6 cms, cada uma, e fazem 60° , uma com a outra;
- b) O plano do rectângulo faz 30° com o plano de projecção;
- c) As projectantes são perpendiculares ao plano de projecção;
- d) A diagonal BD é de maior declive, isto é, é perpendicular ao traço do plano do rectângulo;
- e) O vértice B está no plano de projecção.

23. Desenhar um trapézio rectângulo $ABCD$, medindo as suas bases 5 e 3 cms e tendo de altura 4 cms. Desenhar, depois, um trapézio isósceles $A'B'C'D'$ que tenha de área $\frac{2}{3}$ da área do trapézio desenhado e que possa ser obtido deste por projecção paralela sobre um plano paralelo à diagonal mais pequena.

24. Desenhar uma projecção paralela dum trapézio rectângulo, nas condições seguintes :

- a) Base maior do trapézio, igual a 5 cms; base menor e altura, iguais a 3 cms;
- b) O plano do trapézio faz 60° com o plano de projecção;
- c) O vértice do ângulo agudo do trapézio está no plano de projecção;
- d) A recta que une os pontos médios das bases é paralela ao plano de projecção;
- e) As projectantes são perpendiculares ao plano do trapézio.

25. Desenhar um triângulo $A'B'C'$, sendo $B'C'$ igual a 5 cms, $C'A'$, igual a 4 cms e $A'B'$, igual a 3 cms.

Considerar o triângulo desenhado, como projecção paralela

dum triângulo equilátero ABC e determinar, em seguida, a figura em que se projecta o pentágono regular com um vértice em C e inscrito na circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

[Nota: A figura pedida é afim dum pentágono regular numa afinidade que transforme um triângulo equilátero no triângulo desenhado. Aconselha-se a que se tome para eixo dessa afinidade a paralela s a $A'B'$ tirada por C'].

26. Determinar uma projecção ortogonal $A'B'C'D'E'$ dum pentágono regular $ABCDE$. Raio do círculo circunscrito ao pentágono, 3 cms. Cota do vértice A , 1 cm. Ângulo do lado AB com o traço, no plano de projecção, do plano do pentágono, 30° . Ângulo destes dois planos, 30° .

27. Determinar uma projecção paralela de um triângulo equilátero ABC de 5 cms de lado, nas condições seguintes:

- a) O lado AB é paralelo ao plano de projecção;
- b) O plano do triângulo faz 30° com o plano de projecção;
- c) As projectantes são perpendiculares ao lado AC e fazem 60° com o plano de projecção.

28. Desenhar um triângulo $A'B'O'$, sendo $A'B'$ igual a 4 cms, $A'O'$ igual a 3 cms e $B'O'$ igual a 2 cms.

Determinar a projecção paralela dum pentágono regular de tal modo que um dos lados do pentágono se projecte em $A'B'$ e o seu centro em O' .

[Nota: A projecção pedida é figura afim dum pentágono regular numa afinidade que transforme um triângulo AOB , de forma conhecida, no triângulo $A'O'B'$.

Para determinar os ângulos do triângulo AOB , inscrever numa circunferência, desenhada ao lado, arbitrariamente, um pentágono regular].

29. Considerar um cubo de aresta igual a 4 cms.

Designar por A , B , C e D os vértices duma das suas faces; por $\bar{A}$, o vértice oposto a A ; por $\bar{B}$, o vértice oposto a B ; por $\bar{C}$, o vértice oposto a C ; por $\bar{D}$, o vértice oposto a D .

Determinar uma projecção paralela oblíqua do cubo considerado, nas condições seguintes:

- a) A face $ABCD$ está no plano de projecção;
- b) As projectantes são perpendiculares ao plano determinado pelos vértices A , $\bar{B}$ e $\bar{D}$.

30. Desenhar um quadrado $ABCD$. Determinar e designar por M o ponto médio do lado BC .

Construir um losango tal que uma diagonal seja dupla da outra e que possa ser obtido por projecção paralela do quadrado desenhado sobre um plano paralelo à recta AM .

31. Desenhar um pentágono regular $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 2,5 centímetros de raio.

Determinar uma projecção paralela $A'B'C'D'E'$ do pentágono desenhado, sobre um plano paralelo ao lado AB de tal forma que os ângulos em A e C se projectem em ângulos rectos, isto é, que sejam rectos na projecção os ângulos em A' e C' .

32. Determinar uma projecção paralela dum pentágono $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 2,5 centímetros de raio.

Dados:

- a) O pentágono tem o vértice A no plano de projecção;
- b) O lado AB do pentágono faz 30° com o traço do plano desta figura;
- c) O plano do pentágono é perpendicular ao plano de projecção;
- d) Ângulo das projectantes com o plano de projecção, 30° ;
- e) Ângulo das projecções ortogonais das projectantes com o traço do plano do pentágono, 45° .

33. Desenhar uma projecção paralela dum pentágono $ABCDE$ inscrito numa circunferência de 2,5 cms de raio, nas condições seguintes:

- a) O pentágono tem o vértice A no plano de projecção;
- b) O lado AB faz 30° com o traço do plano do pentágono;
- c) O plano do pentágono faz 60° com o plano de projecção;
- d) As projectantes são perpendiculares ao plano do pentágono.

34. Um quadrado de 4 cms de lado tem o vértice A no plano de projecção e o lado AB faz 30° com o traço do plano do quadrado no plano de projecção.

Sendo de 45° o ângulo do plano do quadrado com o plano de projecção; sendo de 45° , também, o ângulo das projectantes com o plano de projecção; tendo a projecção a mesma área que o quadrado projectado; determinar a projecção.

35. Desenhar um triângulo rectângulo isósceles cuja hipotenusa meça 5 cms. Designar por A o vértice do ângulo recto; por B e C ,

os vértices dos ângulos agudos; por M , o ponto médio do cateto AC . Determinar um triângulo equilátero $A'B'C'$ que possa ser obtido por projecção paralela do triângulo ABC sobre um plano paralelo à recta BM .

Elipse

Elipse — é toda a curva afim duma circunferência.

Centro da elipse — é o ponto afim do centro da circunferência de que a elipse é a curva afim.

Diâmetros — são as rectas que passam pelo centro.

Diâmetros conjugados — são dois diâmetros da elipse que têm como afins dois diâmetros perpendiculares da circunferência.

Eixos — são dois diâmetros conjugados perpendiculares.

Vértices — são os pontos de encontro dos eixos com a elipse.

Direcções conjugadas — são direcções, que se transformam em direcções perpendiculares, quando a elipse se transforma por afinidade numa circunferência.

Exemplos de direcções conjugadas:

[De facto, nos exemplos que seguem, é de conhecimento trivial que no caso de circunferência, as direcções correspondentes às direcções consideradas são perpendiculares].

a) A direcção duma tangente e a da recta que une o seu ponto de contacto com o centro;

b) A direcção duma corda e a da recta que une o ponto médio da corda ao centro;

c) A direcção de duas cordas paralelas e a da recta que une os pontos médios das cordas;

d) As direcções das diagonais dum paralelogramo circunscrito;

e) As direcções de dois lados consecutivos dum paralelogramo inscrito;

f) As direcções das rectas que unem um ponto da elipse aos extremos dum diâmetro.

Exemplos de diâmetros:

a) É um diâmetro a recta que une os pontos de contacto de duas tangentes paralelas. A direcção conjugada do diâmetro é a das tangentes;

b) É um diâmetro a recta que une os pontos médios de duas cordas paralelas. A direcção conjugada do diâmetro é a das cordas;

c) É um diâmetro a recta que une o ponto de cruzamento de duas tangentes ao ponto médio da corda dos contactos. A direcção conjugada do diâmetro é a da corda dos contactos;

- d) São diâmetros as medianas dum paralelogramo circunscrito;
- e) São diâmetros, e conjugados, também, as diagonais dum paralelogramo circunscrito;
- f) São diâmetros as diagonais dum paralelogramo inscrito;
- g) São diâmetros, e conjugados, também, as medianas dum paralelogramo inscrito.

Exemplos de problemas :

a) *Problema fundamental* : Dada uma recta s e uma elipse (E), determinar uma homologia afim que tenha para eixo a recta s e transforme a elipse (E) numa circunferência. O problema tem sempre solução. Existem, precisamente, duas homologias afins, uma concordante, outra discordante, que resolvem o problema.

O problema é de capital importância, porque é a base dum método sistemático de resolução de problemas relativos à elipse, reduzindo problemas de elipse a problemas de circunferência.

Existem dois métodos gerais para resolver o problema :

α) Resolvendo um problema de ângulos. Em geral, buscam-se dois pares de direcções conjugadas e procura-se, que se transformem em ângulos rectos, os ângulos que formam cada par de direcções conjugadas ;

β) Obrigando determinados pontos a terem determinadas *potências* relativamente à circunferência que se procura construir.

b) *Determinação dos eixos duma elipse*.

Eixos são dois diâmetros que satisfazem às duas condições:

α) São conjugados ; β) são perpendiculares.

O problema reduz-se ao problema já citado :

— Determinar rectas perpendiculares, às quais correspondam rectas, igualmente, perpendiculares.

Exercícios resolvidos :

I — *Desenhar um triângulo OAB, rectângulo em A e isósceles, de cateto 3 cms (fig. 4).*

Determinar os eixos da elipse que tem para centro o ponto O, passa pelo ponto médio de OA e é tangente em B ao cateto AB. Procuremos dois pares de direcções conjugadas : a) — AB é tangente, e B é o ponto de contacto ; logo, a direcção de AB é conjugada da direcção de OB que une o centro O ao ponto de contacto B ; b) — o segmento que une o ponto O ao ponto médio de OA , que é ponto da elipse, é uma corda, logo, a direcção desta corda é

conjugada da direcção que une o ponto médio da mesma corda ao centro O .

Por meio deste par de direcções conjugadas, e, tomando para eixo a recta $s = AB$, determinou-se o ponto O' correspondente de O , o qual é o centro da circunferência que se pretende.

Os eixos da elipse são obtidos procurando o par de rectas perpendiculares, tiradas por O , a que corresponde um par de rectas, também, perpendiculares. Este problema foi resolvido desenhando a circunferência que passa pelos pontos O e O' e tem o seu centro na recta s , eixo da homologia.

II — *Uma circunferência de 3 cms de raio está num plano perpendicular ao plano de projecção. A circunferência é tangente ao*

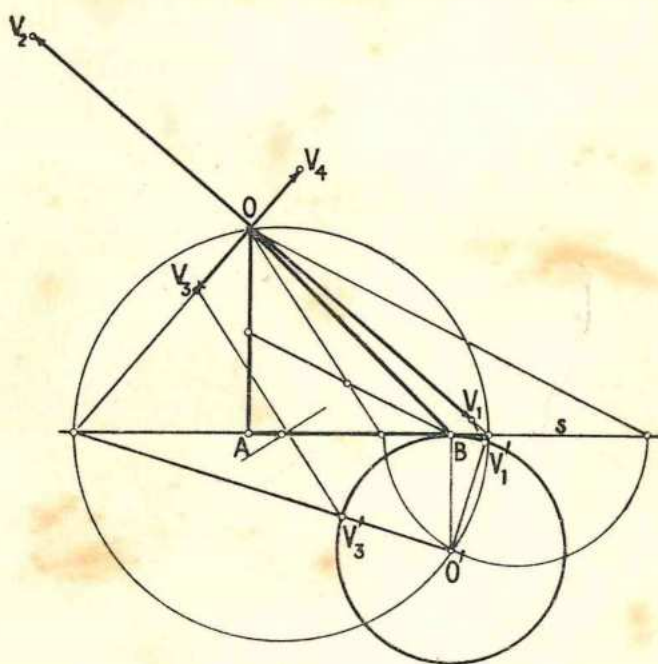


Fig. 4

traço, que se designará por s , do seu plano no plano de projecção (fig. 5).

As projectantes fazem ângulos de 45° com o plano de projecção. As projecções ortogonais das projectantes fazem ângulos de 30° com o traço s .

Fixado, arbitrariamente, na folha de desenho o traço s , determinar os eixos da elipse em que se projecta a circunferência.

Para determinarmos a projecção O' do centro O , conhecemos a projecção ortogonal O_0 de O , assim como a projecção ortogonal $O_0 O'$ da projectante OO' , que é uma recta que faz 30° com o traço s .

[Notar que, por esquecimento, a letra s não está indicada na figura].

Como as projectantes fazem 45° com o plano de projecção, o segmento $O_0 O'$ é igual ao segmento $O_0 O$.

Determinado O' , procuram-se as rectas perpendiculares pas-

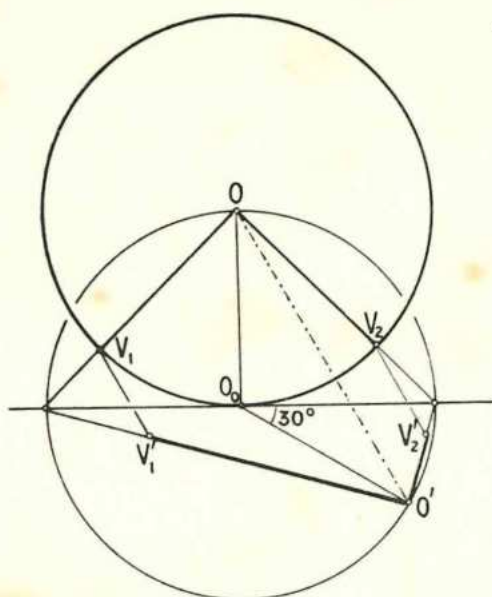


Fig. 5

sando por O' , que correspondem a rectas perpendiculares passando por O , que são os eixos pedidos. Na figura estão, apenas deter-

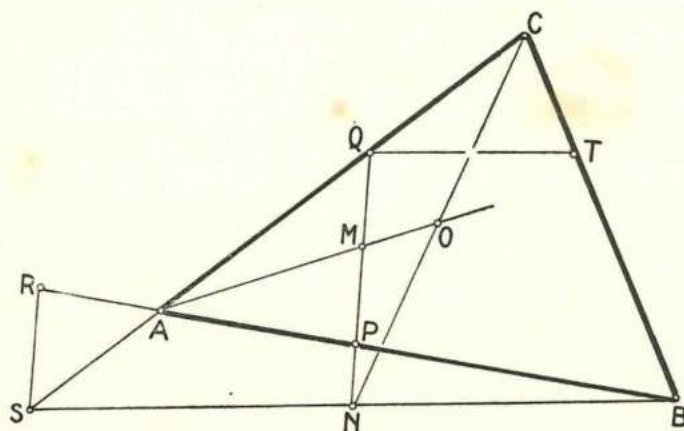


Fig. 6

minados dois vértices, V_1 e V_2 ; os dois restantes constroem-se por simetria.

III — Desenhar (fig. 6) um triângulo ABC cujos lados AB , BC e CA meçam, respectivamente, 8, 6 e 7 cms.

Sobre AB , marcar o ponto P , tal que AP seja igual a 3 cms, e sobre AC , o ponto Q , tal que AQ seja igual a 4 cms.

Considerar a elipse inscrita no triângulo e que tenha para pontos de contacto com os lados AB e AC , respectivamente, os pontos P e Q .

Determinar o centro de elipse e o ponto de contacto da tangente BC .

Para resolvermos o problema, começamos por analisar a fig. 6-A.

Seja $A'B'C'$ um triângulo circunscrito a uma circunferência e P' e Q' os pontos de contacto dos lados $A'B'$ e $A'C'$.

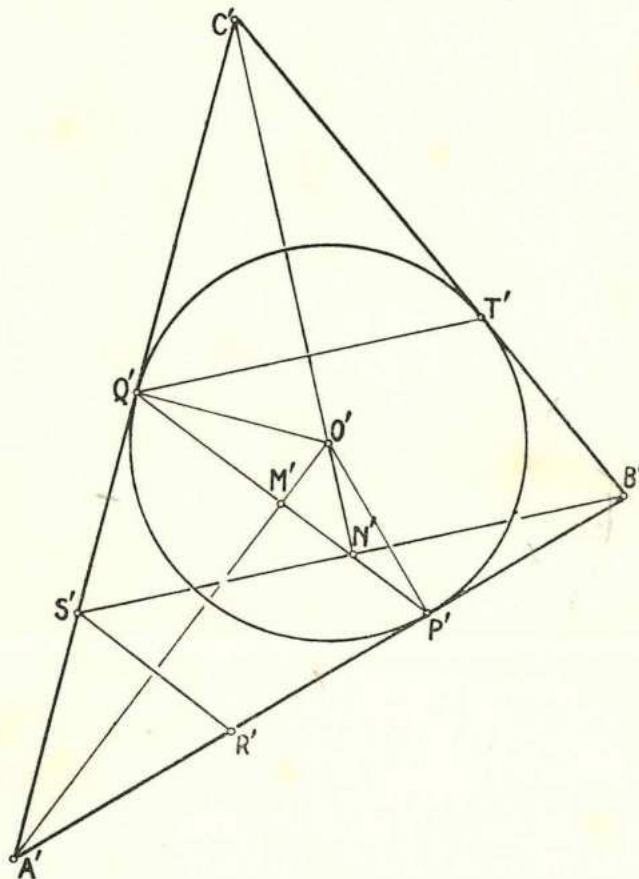


Fig. 6-A

O centro da circunferência é o ponto de cruzamento das bissetrizes do triângulo.

Uma das bissetrizes obtém-se unindo A' ao ponto médio M' de $P'Q'$.

Uma outra pode obter-se da seguinte forma. Transporta-se o segmento $C'B'$ para o lado $C'A'$.

Para isso, toma-se em $A'B'$, $P'R' = P'B'$.

Tirando, em seguida, por R' a paralela $R'S'$ a $Q'P'$, determina-se em $A'C'$ o ponto S' . Vamos mostrar que $C'S' = C'B'$.

Tem-se $S'Q' = R'P'$, visto ser $A'Q' = A'P'$;

logo,

$$\begin{aligned} C'S' &= C'Q' + Q'S' = C'T' + R'P' = C'T' + P'B' = \\ &= C'T' + T'B' = C'B'. \end{aligned}$$

Unindo S' a B' , obtém-se um triângulo isósceles $S'C'B'$, de modo que a bissetriz do ângulo em C' se obtém unindo C' ao ponto médio N' de $S'B'$.

A paralela a $S'B'$, tirada por Q' , passa pelo ponto de contacto T' da tangente $C'B'$.

IV — *Desenhar (fig. 7) um trapézio rectângulo com as seguintes medidas :*

Base maior, igual a 6 cms ; base menor e altura, iguais a 4 cms.

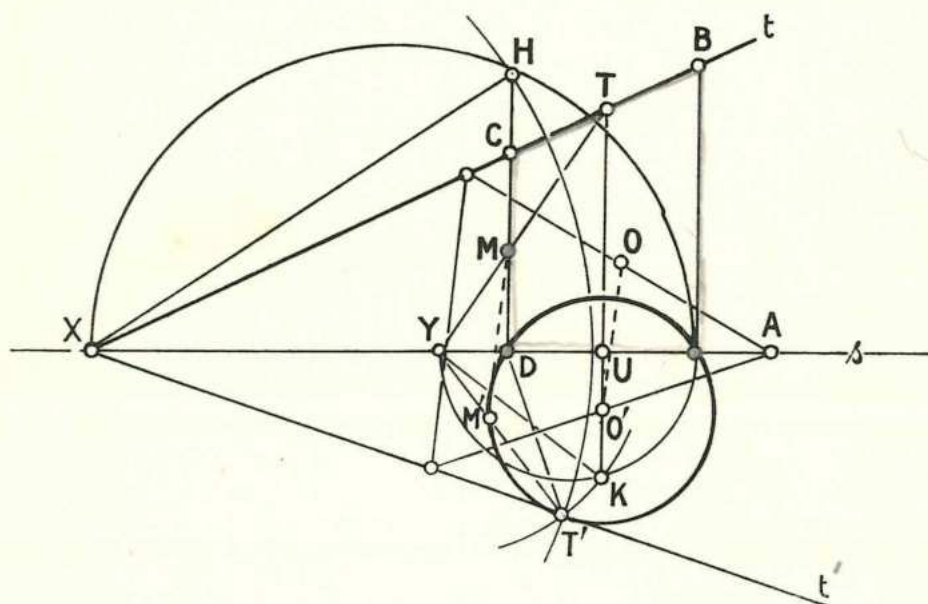


Fig. 7

Designar : Por B, o vértice do ângulo agudo ; por C, o vértice do ângulo obtuso ; por A, o vértice oposto a C ; por D, o vértice oposto a B ; por M, o ponto médio da base CD ; por T, o ponto médio do lado BC ; por t, a recta a que pertence o lado BC.

Determinar o centro O da elipse que passa pelos três pontos A, D, e M e é tangente à recta t no ponto T ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Na figura verificam-se algumas falhas : A letra A está um pouco deslocada ; a recta XT' está designada por t , quando devia ser por t' ; não se encontra traçada a recta TT' que une os pontos correspondentes T e T' .

Resolveremos o problema transformando, por homologia afim, a elipse em circunferência. Para eixo desta homologia, tomaremos a recta s a que pertence o lado AD .

Iremos procurar o correspondente T' de T .

Designemos: Por X , o ponto de intersecção de t com s ; por Y , o ponto de intersecção da recta TM com s .

O método consiste em determinar as distâncias a que T' fica dos pontos X e Y .

Suponhamos o problema resolvido.

Para a distância $\overline{XT'}$, visto que t' é tangente à circunferência, verifica-se $\overline{XT'}^2 = \overline{XD} \cdot \overline{XA}$. Determina-se, pois, $\overline{XT'}$, determinando a meia proporcional de $\overline{XD}$ e $\overline{XA}$. Na fig. 7, fez-se esta determinação por meio da circunferência de diâmetro $\overline{XA}$ e encontrou-se a corda $\overline{XH}$.

Para a distância $\overline{YT'}$, verifica-se:

$$\frac{\overline{YT'}}{\overline{YM}} = \frac{\overline{YT}}{\overline{YM}} \text{ e } \overline{YT'} \cdot \overline{YM} = \overline{YA} \cdot \overline{YD}; \text{ donde, } \overline{YT'}^2 = \frac{\overline{YT} \cdot \overline{YA} \cdot \overline{YD}}{\overline{YM}}.$$

Tirando $TU \parallel MD$ e determinando a intersecção U de TU com s , resulta:

$$\frac{\overline{YT}}{\overline{YM}} = \frac{\overline{YU}}{\overline{YD}}. \text{ Por consequência, } \overline{YT'}^2 = \overline{YU} \cdot \overline{YA}.$$

Determina-se, pois, $\overline{YT'}$, determinando a meia proporcional de $\overline{YU}$ e $\overline{YA}$.

Na fig. 7 esta determinação foi feita por meio da circunferência de diâmetro $\overline{YA}$ e encontrou-se a corda $\overline{YK}$.

Determinado o ponto T' , resta determinar o centro O' da circunferência que passa pelos três pontos A , D e T' ; o centro O , pedido, da elipse, é o ponto correspondente de O' .

Exercícios

36. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados AB e CD , com as seguintes medidas: ângulo dos diâmetros 60° ; AB , igual a 7 cms; CD , igual a 5 cms.

Determinar um rectângulo $MNPQ$, que seja inscrito na elipse e, tal que a razão MN/MQ , de dois lados não paralelos, seja igual a $3/4$.

37. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados AB e CD .

Dados: AB , igual a 8 cms; CD , igual a 7 cms. Ângulo destes diâmetros, 45° .

Construir um rectângulo inscrito na elipse, medindo dois dos seus lados paralelos 4 cms, cada um.

38. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados AB e CD .

Dados: AB , igual a 5 cms; CD , igual a 6 cms; é de 45° o ângulo dos diâmetros.

Construir um losango circunscrito, cujos ângulos agudos meçam 60°

39. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados, AB e CD .

Dados: AB , igual a CD , igual a 5 cms. Ângulo dos diâmetros, 45° .

Construir um trapézio nas condições seguintes:

- a) É rectângulo;
- b) É circunscrito à elipse;
- c) Tem as bases perpendiculares ao diâmetro AB ;
- d) O ângulo agudo do trapézio mede 60° .

40. Desenhar um triângulo ABC , rectângulo em A , cujos catetos AB e AC meçam 5 e 4 cms, respectivamente.

Designar por M o ponto médio da hipotenusa BC .

Determinar os 4 vértices P , Q , R e S da elipse que tem para centro o vértice A do triângulo desenhado, é tangente à hipotenusa BC no ponto M e cujos eixos ficam sobre as rectas a que pertencem os catetos AB e AC .

41. Desenhar um triângulo ABC , sendo AB , igual a 6 cms; AC , igual a 8 cms; BC , igual a 3 cms.

Designar por e a paralela conduzida por C a AB .

Determinar os três outros vértices, D , E e F , da elipse que tem um vértice no ponto C , um dos eixos sobre a recta e , e passa pelos pontos A e B .

42. Desenhar um triângulo equilátero ABC , de 4 cms de lado. Designar por P o ponto médio do lado AB .

Na elipse tangente à recta BC , que tem para centro o ponto A

e para um dos seus vértices, o ponto P , determinar os restantes vértices, Q , R e S .

43. Desenhar um triângulo ABC , sendo AB , igual a 6 cms; BC , igual a 4 cms; CA , igual a 7 cms.

Determinar os eixos da elipse circunscrita ao triângulo ABC e que tem para centro o ponto de cruzamento das medianas do mesmo triângulo.

44. Desenhar um rectângulo $ABCD$ cujos lados meçam 4 cms e 6 cms.

Traçar e designar por t a recta que une os pontos médios dos lados AB e AD .

Determinar os eixos da elipse inscrita no rectângulo $ABCD$ e tangente à recta t .

45. Determinar os eixos duma elipse que satisfaça às condições seguintes:

a) Os eixos estejam na razão $\frac{2}{3}$;

b) A elipse seja inscrita num quadrado de 4 cms de lado.

46. Desenhar um rectângulo $OABC$ cujos lados meçam 3 cms e 4 cms.

Considerar a elipse que tem para centro o ponto O e passa pelos pontos A , B e C .

Construir o paralelogramo $MNPQ$ que é circunscrito à elipse, tem a diagonal MP paralela à diagonal AC do rectângulo desenhado e os lados MN e PQ , paralelos a OA .

47. Desenhar um triângulo ABC , sendo AB , igual a 8 cms; AC , igual a 7 cms e BC , igual a 6 cms.

No lado AB , fixar o ponto M , tal que AM , igual a 3 cms; no lado AC , o ponto N , tal que, AN , igual a 4 cms.

Determinar os eixos da elipse inscrita no triângulo ABC e que passa pelos pontos M e N .

48. Fixar uma elipse pelos seus eixos, medindo estes 6 cms e 4 cms.

Tirar pelo centro uma recta s que faça 30° com o eixo maior.

Determinar a afinidade que tem para eixo a recta s e transforma a elipse numa circunferência.

Desenhar, em seguida, a circunferência afim, e tirar tangentes à elipse paralelas à recta s .

49. Fixar um ângulo de 30° .

Designar por O o vértice; por a e b , os seus lados.

Tomar, em seguida, no lado a os dois pontos A e B , tais que: OA , igual a 1 cm; OB , igual a 5 cms.

Considerar a elipse E que é tangente ao lado b do ângulo fixado e tem o segmento AB para um dos seus eixos.

Construir um triângulo equilátero, MNP , que seja circunscrito à elipse E e tenha o lado MN na tangente b .

[Nota: O problema reduz-se a tirar tangentes à elipse E que façam 60° com a tangente b].

50. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados, AB e CD .

Dados: ângulo dos diâmetros, 60° ; AB , igual a 6 cms; CD , igual a 5 cms.

Construir um paralelogramo circunscrito, nas seguintes condições:

a) A diagonal MP seja bissectriz dos ângulos agudos que formam os diâmetros dados;

b) A diagonal NQ meça 10 cms.

51. Desenhar um rectângulo $ABCD$, cujos lados meçam 5 e 3 cms.

Determinar, depois, os eixos da elipse que tem para centro o vértice A do rectângulo desenhado e passa pelos outros três vértices.

52. Desenhar um triângulo ABC , sendo AB , igual a 5 cms; AC , igual a 4 cms e BC , igual 2,5 cms.

Determinar os extremos dos eixos da elipse que passa por B e C , com o centro no ponto A e com um eixo paralelo à bissectriz do ângulo ACB .

53. Desenhar um rectângulo $ABCD$ cujos lados meçam 5 e 3 cms.

Determinar, depois, um dos eixos da elipse que tem para centro o vértice A do rectângulo desenhado e passa pelos outros três vértices.

54. Fixar duas rectas perpendiculares, s e t , e designar por X o seu ponto de intersecção. Fixar, depois, em s os dois pontos A e B , sendo XA igual a 4 cms e B o ponto médio do segmento XA .

Determinar os eixos duma elipse que satisfaça às seguintes condições :

- a) Passa pelos pontos A e B ;
- b) Seja tangente à recta t ;
- c) Tenha os eixos paralelos às bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas t e s ;
- d) Os comprimentos dos eixos estejam na razão 1:2.

Nota : O problema tem mais de uma solução.

55. Fixar uma recta a e, depois, uma recta b e uma recta c que sejam perpendiculares à recta a e que distem uma da outra 5 cms.

Fixar, depois, na recta b um ponto B e na recta c um ponto C ; os dois pontos devem ficar para o mesmo lado da recta a ; B deve distar da recta a 4 cms e C , 1 cm.

Determinar os eixos da elipse que é tangente à recta a e às duas rectas b e c nos pontos B e C .

Nota : Pode construir-se o centro da elipse ; depois, a tangente paralela à recta a ; fica-se deste modo a conhecer um paralelogramo circunscrito, que, no caso presente, é mesmo um quadrado.

56. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes medidas :

Base maior e altura, iguais a 5 cms;

Base menor, igual a 3 cms.

Designar por B o vértice do ângulo agudo ; por C , o vértice do ângulo obtuso ; por A , o vértice oposto a C ; por D , o vértice oposto a B .

Traçar a perpendicular t em D à diagonal BD .

Considerar a elipse E circunscrita ao trapézio desenhado a tangente à recta t .

Construir as tangentes à elipse E que são paralelas aos lados do trapézio.

57. Desenhar um losango $ABCD$; sendo a diagonal AC igual a 5 cms e a diagonal BD , igual a 7 cms.

Traçar a recta t que passa por B e faz 60° com a diagonal BD .

Considerar a elipse E que é circunscrita ao losango desenhado e tem para tangente em B a recta t .

Construir o losango $MNPQ$ circunscrito à elipse E e com o lado MN sobre a tangente t .

Nota : Observe-se que os vértices dum losango circunscrito a uma elipse estão, necessariamente, nos seus eixos.

58. Fixar uma elipse por meio dos seus eixos, AB e CD ; sendo AB igual a 8 cms e CD , igual a 6 cms.

Tomar no eixo AB os pontos E e F , sendo AE igual a 3 cms e AF , igual a 5 cms, e uni-los com o ponto C .

Construir o paralelogramo $MNPQ$ nas seguintes condições:

- a) É inscrito na elipse;
- b) Tem a diagonal MP paralela à recta CE ;
- c) Tem os lados MN e PQ paralelos à recta CF .

59. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 4 cms de lado.

Traçar as rectas AM e DM que unem os vértices A e D ao ponto médio M do lado BC .

Determinar os vértices da elipse circunscrita ao quadrado desenhado e que admite as direcções AM e DM para direcções conjugadas.

60. Desenhar um trapézio rectângulo, medindo as bases 6 e 4 cms e tendo de altura 3 cms.

Determinar os eixos da elipse circunscrita ao trapézio e que tem um eixo paralelo à menor diagonal.

Tomar para eixo da afinidade, que transforma a elipse numa circunferência, a paralela à menor diagonal, tirada pelo vértice do ângulo agudo do trapézio.

61. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes dimensões: base maior, 6 cms; base menor, 4 cms; altura, 3 cms.

Determinar os eixos da elipse assim definida:

- a) É circunscrita ao trapézio desenhado;
- b) Tem um dos seus eixos paralelo à diagonal maior do mesmo trapézio.

62. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes dimensões: base maior, 5 cms; base menor, 3 cms; altura, 5 cms.

Designar: por A , o vértice do ângulo obtuso; por B , o vértice do ângulo agudo; por C , o vértice oposto a A ; por D , o vértice oposto a B .

Traçar a diagonal AC .

Determinar os eixos da elipse assim definida:

- a) É tangente em B ao lado CB do trapézio;
- b) É tangente em D ao lado AD do trapézio;
- c) Tem um eixo paralelo à diagonal AC , traçada.

63. Desenhar um triângulo equilátero OAB de 4 cms de lado; fixar, depois, no lado OB , o ponto C , tal que OC , igual a 3 cms.

Considerar a elipse que tem para centro o ponto O , é tangente ao lado AB no ponto A e passa, também, por C .

Determinar:

- a) Os extremos E e F do diâmetro conjugado de OA ;
- b) A tangente no ponto C .

64. Desenhar um losango cujas diagonais meçam 4 cms e 8 cms.

Por um dos extremos da diagonal maior, tirar uma recta t que faça com esta diagonal 45° .

Determinar os eixos da elipse circunscrita ao losango e tangente à recta t .

65. Fixar três pontos A , B e C , sendo o triângulo por eles determinado rectângulo em A e medindo o cateto AB 6 cms e o cateto AC 4 cms.

No cateto AB marcar o ponto O , sendo BO igual a 2 cms.

Considerar a elipse E assim definida:

- a) Tem para centro o ponto O ;
- b) Passa em B ;
- c) Passa, também, em C , e tem para tangente neste ponto a recta AC .

Determinar o rectângulo $MNPQ$ inscrito na elipse E que tem o vértice M sobreposto ao ponto C .

[Nota: Visto que as medianas dum paralelogramo inscrito são diâmetros conjugados, um rectângulo inscrito tem, necessariamente, os lados paralelos aos eixos].

66. Fixar três pontos A , B e C , tais que o triângulo por eles determinado seja isósceles e rectângulo em A , medindo os catetos 6 cms, cada um.

No cateto AB , marcar o ponto O , sendo BO igual a 2 cms.

Considerar a elipse E assim definida:

- a) Tem para centro o ponto O ;
- b) É tangente à recta AC ;
- c) Passa em B e tem para tangente neste ponto a recta BC .

Determinar o rectângulo $MNPQ$, circunscrito à elipse E , que tem o lado MN na tangente AC .

67. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 10 cms de lado.

No lado AB , tomar o ponto P , tal que AP , igual a 3 cms; no lado AC , o ponto Q , tal que AQ , igual a 4 cms.

Considerar a elipse inscrita no triângulo ABC e que tem os pontos P e Q para pontos de contacto.

Construir as tangentes a esta elipse, paralelas à recta PQ .

68. Desenhar um triângulo ASB , sendo AS , igual a 6 cms; SB , igual a 5 cms e AB , igual a 3 cms.

Designar por C o ponto médio do lado BS e tirar em A a perpendicular a ao lado AS .

Determinar os eixos da elipse que passa pelos pontos B e C , tem um vértice no ponto A e para tangente neste vértice, a recta a .

[Visto que um dos eixos da elipse fica na recta AS , poder-se-ão determinar dois novos pontos B' e C' e ficamos com cinco pontos da elipse e, além disso, uma tangente].

69. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes medidas:

Base maior, 6 cms; lado oblíquo e base menor, iguais a 4 cms.

Designar por C , o vértice do ângulo obtuso; por B , o vértice do ângulo agudo; por A , o vértice oposto a C ; por D , o vértice oposto a B .

Determinar os eixos da elipse assim definida:

a) Passa pelos pontos A , B e D ; b) admite as rectas CB e CD como tangentes.

70. Fixar uma elipse pelos seus eixos que devem medir 7 cms e 5 cms, respectivamente.

Circunscrever à elipse fixada um quadrado $ABCD$.

[Nota: O problema reduz-se a tirar tangentes à elipse que façam ângulos de 45° com os eixos].

71. Desenhar um trapézio rectângulo com as medidas:

Base maior, 5 cms; base menor e altura, 3 cms.

Designar: por A , o vértice do ângulo agudo; por D , o vértice do ângulo obtuso; por C , o vértice oposto a A ; por B , o vértice oposto a D . Traçar, depois, a diagonal DB .

Considerar a elipse E assim determinada: passa por C , é tangente à recta AD e tem o segmento AB para um dos seus diâmetros.

Pedem-se :

- a) A tangente t à elipse E no ponto C ;
- b) O 2.º ponto de intersecção F da diagonal DB com a elipse E e a tangente t no mesmo ponto.

72. Desenhar um triângulo ABC cujos lados, AB , BC e CA , meçam, respectivamente, 8, 7 e 6 cms.

Traçar a altura correspondente ao vértice C e, sobre esta, marcar o ponto O que dista 1 cm da base AB .

Determinar os eixos da elipse inscrita no triângulo desenhado e que tenha para centro o ponto O . (Servir-se para resolver o problema duma afinidade que tenha para eixo AB).

73. Desenhar um paralelogramo $ABCD$, cujos lados AB e AD meçam 6 e 4 cms, e formem um ângulo de 60° . Tomar o ponto médio M do lado BC e por este ponto tirar a recta t perpendicular aos lados paralelos AB e DC .

Existe uma elipse inscrita no paralelogramo desenhado e tangente à recta t .

Determinar os pontos de contacto desta elipse com os lados do paralelogramo e a tangente t e os pontos da mesma elipse que pertencem às diagonais AC e BD .

74. Desenhar um triângulo ABC , equilátero, de 6 cms de lado. Considerar a elipse assim definida :

- a) É tangente a BC no ponto B ;
- b) É tangente, também, no ponto A à paralela tirada por este ponto a BC ;
- c) Tem um eixo paralelo a AC .

Construir um paralelogramo circunscrito à elipse com uma diagonal paralela a BC , que meça 10 cms.

75. Fixar uma elipse por meio de dois diâmetros conjugados que façam um ângulo de 60° e meçam, respectivamente, 8 cms e 6 cms.

Circunscrever à elipse considerada um rectângulo $ABCD$ cujos lados sejam paralelos às bissectrizes dos ângulos formados pelos diâmetros fixados.

Nota : O problema reduz-se a tirar tangentes à elipse, paralelas a rectas determinadas.

76. Uma circunferência de 3 cms de raio está num plano que faz com o plano de projecção um ângulo de 30° .

A circunferência é tangente ao traço, que se designará por s , do seu plano, no plano de projecção.

As projectantes fazem ângulos de 30° com o plano de projecção. As projecções ortogonais das projectantes são paralelas ao traço s .

Fixado, arbitrariamente, na folha de desenho o traço s , determinar os eixos da elipse em que se projecta a circunferência considerada.

77. Desenhar um triângulo ABC cujos lados AB , AC e BC meçam 5, 4 e 3 cms, respectivamente.

Determinar os vértices da elipse que tem para centro o ponto A , passa pelos pontos B e C e tem um eixo paralelo à bissectriz do ângulo $\hat{ACB}$.

78. Fixar duas rectas perpendiculares, t e s e designar por X o seu ponto de intersecção.

Fixar, depois, em t , o ponto T , tal que XT igual a 3 cms; em s , o ponto A , tal que XA igual a 4 cms.

Fixar, finalmente, o ponto médio, B , do segmento XA .

Considerar a elipse assim definida:

- a) É tangente à recta t no ponto T ;
- b) Passa pelos dois pontos A e B ;
- c) Tem um eixo paralelo à corda TB .

Construir o paralelogramo circunscrito à elipse com os lados paralelos às rectas s e t .

79. Uma circunferência de 2 cms de raio está num plano que faz com o plano de projecção um ângulo de 60° . A circunferência é tangente ao traço, que se designará por s , do seu plano no plano de projecção.

As projectantes são perpendiculares ao plano da circunferência.

Fixado, arbitrariamente, na folha de desenho o traço s , determinar os eixos da elipse em que se projecta a circunferência.

80. Desenhar dois ângulos adjacentes, um de 45° e outro de 30° . Designar por b o lado comum; por a , o outro lado do ângulo de 45° ; por c , o outro lado do ângulo de 30° .

Sobre os lados a e b do ângulo de 45° , marcar dois pontos A e B que distem do vértice comum dos ângulos 6 e 3 cms, respectivamente.

Determinar os eixos da elipse tangente aos lados a e b nos pontos A e B e que tenha um eixo paralelo ao lado c .

[Notar que a recta, que une o ponto de cruzamento de duas

tangentes ao ponto médio da corda dos contactos é um diâmetro que tem para direcção conjugada a direcção da corda.

Tomar para eixo da afinidade que transforme a elipse numa circunferência, o lado a].

Homologia não afim

Em homologia não afim, pontos do infinito, que não pertençam ao eixo de homologia, são transformados em pontos a distância finita.

Recta da fuga — é a imagem da recta do infinito.

Recta limite — é a recta original que tem para imagem a recta do infinito.

Recta principal — é a recta dupla que passa pelo centro da homologia e é perpendicular ao eixo da homologia.

Ponto de fuga principal — é o ponto de fuga que fica na recta principal; é portanto, o ponto de intersecção da recta principal com a recta da fuga.

Ponto limite principal — é o ponto limite que fica na recta principal; é, portanto, o ponto de intersecção da recta principal com a recta limite.

Ponto duplo principal — é o ponto de intersecção da recta principal com o eixo de homologia.

Caso especial de *homologia não afim* é a *homotetia*.

Homotetia — é uma homologia que, como já foi indicado na «Introdução», tem para eixo a recta do infinito.

A homotetia conserva as razões; conserva os ângulos; conserva o paralelismo; transforma figuras em figuras semelhantes.

Uma homologia transforma um plano em si mesmo; mas, podemos, e é conveniente, para a exposição, supor o plano desdobrado em dois, α e α' , sobrepostos, e dizer que a homologia transforma o plano α no plano α' . O plano α diz-se, então, o plano original; o plano α' , o plano imagem.

De resto, como a operação inversa de homologia é homologia, *original* e *imagem* entram simetricamente — *dualmente*; — do mesmo modo, *recta limite* e *recta de fuga*, *ponto limite* e *ponto de fuga*.

Pontos isogonais. — Os pontos isogonais estão intimamente ligados com os problemas de ângulos.

Rectas, $a, b, \dots$, (fig. 8), com o mesmo ponto limite L , têm,

para imagens, rectas, $a', b', \dots$, paralelas. Por consequência: o ângulo α que fazem as imagens, a' e $\bar{a}'$, de duas rectas, a e $\bar{a}$, depende, apenas, dos pontos limites, L e $\bar{L}$ das rectas originais, a e $\bar{a}$. *O ângulo das imagens fica inteiramente determinado pelos pontos limites das rectas originais.*

[Imagens, $a', b', \dots$, com o mesmo ponto de fuga F' , têm, como originais, rectas, $a, b, \dots$, paralelas. Por consequência: os ângulos que fazem as originais, a e $\bar{a}$, depende, apenas, dos pontos de fuga F' e $\bar{F}'$ das imagens, a' e $\bar{a}'$. *O ângulo das rectas originais fica inteiramente determinado pelos pontos de fuga das suas imagens*].

Como são *duplas* todas as rectas que passam pelo centro de homologia, um ângulo $\hat{cd}$, que tenha, para vértice, o centro de homologia, sobrepõe-se à sua imagem $\hat{c'd'}$.

Um ponto diz-se *isogonal* quando, para todos os ângulos que tenham para vértice tal ponto, se verifica, sempre e sem excepção, que ângulo original e ângulo imagem são ângulos iguais.

O centro de homologia é ponto isogonal.

É, também, manifesto que:

O ponto simétrico do centro de homologia, relativamente à recta limite, é ponto isogonal.

A não ser que se trate de homotetia, homologia que conserva os ângulos, para a qual, portanto, todos os pontos são isogonais, em homologia não afim, não há outros pontos isogonais diferentes dos que ficam apontados: o centro de homologia e o simétrico deste ponto relativamente à recta limite.

Designaremos correntemente (fig 8):

Por I o centro de homologia; por t , o eixo de homologia; por p , a recta principal; por l , a recta limite, por f' , a recta de fuga; por J , o ponto simétrico de I , relativamente a l ; por J' , o simétrico de I , relativamente a f' ; por L_p , o ponto limite principal; por F'_p , o ponto de fuga principal; por W , o ponto duplo principal.

O ponto J' , simétrico do centro de homologia, relativamente à recta limite, é, também, a imagem do ponto isogonal J .

Sendo L e $\bar{L}$ os pontos limites das rectas a e $\bar{a}$, o ângulo α que formam as imagens a' e $\bar{a}'$ é igual aos ângulos $L\hat{I}\bar{L}$ e $L\hat{J}\bar{L}$ que se obtêm unindo os pontos isogonais, I e J , aos pontos limites, L e $\bar{L}$.

Sendo F' e $\bar{F}'$ os pontos de fuga das imagens, a' e $\bar{a}'$, o ângulo que formam as rectas originais, a e $\bar{a}$, é igual aos ângulos $F'\hat{I}\bar{F}'$ e $F'\hat{J}\bar{F}'$ que formam as rectas que unem os pontos I e J' aos pontos de fuga F' e $\bar{F}'$.

*Fig. não conforme com esta propriedade. Ponto de fuga F'
distância isogonal α é o traço de a' em f'*

Podem fixar-se, arbitrariamente, três quaisquer dos seis pontos, I, J, J', L_p, F'_p e W . Se excluirmos as duas combinações, I, J e L_p , I, J' e F'_p , por qualquer das outras combinações possíveis, a homologia fica, unívocamente, determinada.

Podem dar-se, arbitrariamente, três pares $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ de pontos correspondentes, *não colineares*, quer em *rectas duplas* distintas, a, b e c (um par, em cada recta), quer em duas rectas, a , e b , sòmente (dois pares, numa das rectas, o terceiro par, na outra). A homologia fica, unívocamente, determinada.

Podem dar-se, arbitrariamente, três pares, $(a, a'), (b, b'), (c, c')$,

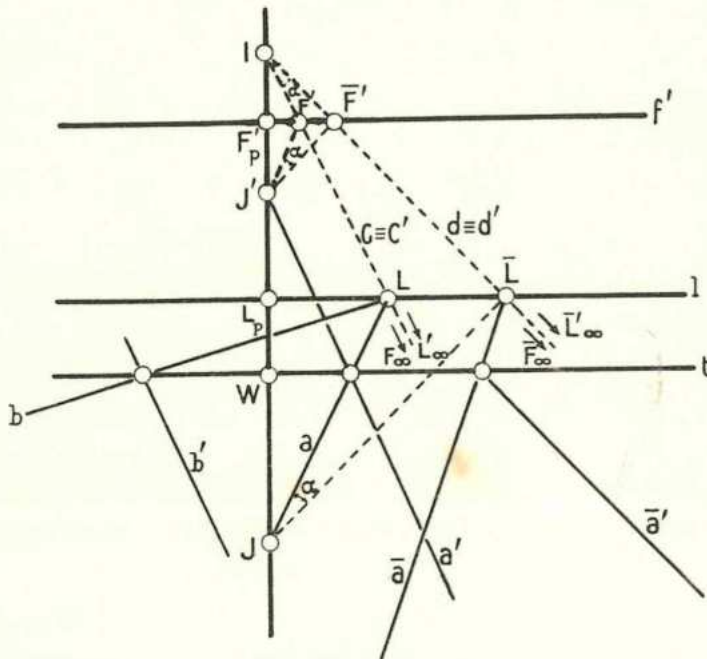


Fig. 8

de rectas correspondentes, *compontuais*, quer se intersectem em *pontos duplos*, A, B, C , todos distintos (um par em cada recta), quer em dois *pontos duplos*, A e B , sòmente (dois pares, num dos pontos, o terceiro par, no outro ponto). A homologia fica unívocamente determinada.

Problemas fundamentais:

a) Por homologia, podem transformar-se três pontos distintos, A, B e C , dados arbitrariamente, numa recta a , em três pontos distintos, A', B' e C' , fixados numa recta a' .

1.º) Uma maneira imediata de resolver o problema é dispor as

duas rectas, a e a' , de maneira que se justaponham dois pontos correspondentes, A e A' por exemplo (fig. 9 (a)).

O centro I da homologia fica, então, no ponto de intersecção das rectas BB' e CC' . Para eixo da homologia, pode ser tomada, arbitrariamente, qualquer recta t , que passe pelo ponto aa' , distinta, porém, das rectas a e a' .

Nota: O ponto B' , considerado na figura, é o ponto do infinito da recta a' e está, por este motivo, designado por B'_∞ .

A recta B ($B' \equiv B'_\infty$) é, pelo mesmo motivo, paralela à recta a' .

2.º) Podem, porém, ser impostas as *rectas duplas*, d_a , d_b , d_c ,

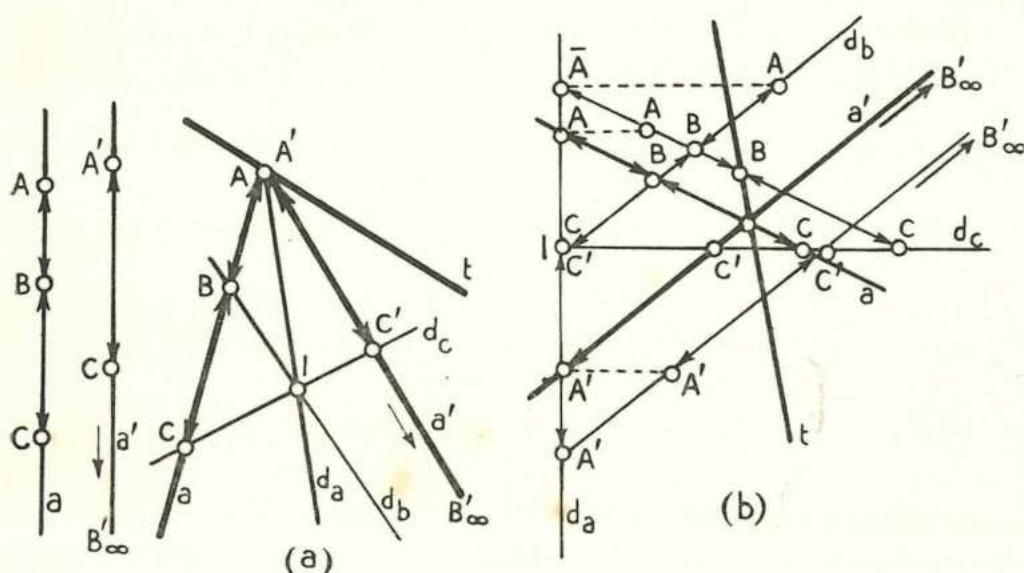


Fig. 9

nas quais devem ficar os pontos homólogos, A e A' , B e B' , C e C' , respectivamente.

Neste caso, não temos a liberdade de justapormos dois pontos homólogos, porque, mesmo naturalmente, sucederá que qualquer dos pontos considerados não venha a justapor-se ao seu correspondente.

Suponhamos, então, que sejam impostas as rectas, d_a , d_b e d_c , nas quais devem ficar os pares de pontos, (A, A') , (B, B') , (C, C') (fig. 9 (b)).

As três rectas, d_a , d_b e d_c , concorrem no centro I da homologia a determinar.

O problema reduz-se a determinar no feixe $I(d_a d_b d_c)$ secções que sejam congruentes das pontuais, a (ABC) e a' ($A'B'C'$), dadas.

Tratemos a pontual a (ABC). Começemos por transportá-la para a recta d_b , de forma que C venha justapor-se a I . (Poder-se-ia

justapor o ponto A , em vez de C). Em seguida, tire-se $A\bar{A}$ paralela a d_c e determine-se a intersecção $\bar{A}$ com d_a . Una-se $\bar{A}$ com o ponto B da pontual transportada.

Transporte-se, agora, a pontual $a(ABC)$ para a recta obtida $\bar{A}B$, de modo que C fique na recta d_c . Resta, apenas, deslocá-la, por translação paralela a d_c , até levar A a ficar em d_a .

De igual modo se procederá com a pontual $a'(A', B' \equiv B'_\infty, C')$.

[Na figura, esta pontual foi, inicialmente, transportada para a recta d_a , fazendo-se sobrepor C' a I].

Para eixo da homologia, pode ser tomada qualquer recta t que passe pelo ponto de intersecção das rectas que determinam pontuais congruentes das pontuais $a(ABC)$ e $a'(A'B'C')$ dadas.

Nota 1.^a: Visto que três pontos colineares quaisquer, podem ser transformados em três pontos colineares arbitrariamente dados, a

razão $\varphi = \frac{AB}{BC}$ de dois segmentos colineares, adjacentes, AB e BC ,

pode ser transformada na razão $\varphi' = \frac{A'B'}{B'C'}$, sejam quais forem os valores de φ e φ' das mesmas razões, contrariamente ao que acontece em homologia afim, que mantém a razão de segmentos colineares, adjacentes ou, mesmo, não adjacentes.

Nota 2.^a: Em homologia não afim, como acabámos de ver, três pontos colineares, A , B e C podem sempre ser transformados em três pontos colineares, A' , B' e C' , quaisquer.

Em homologia afim, a transformação só é possível se as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{A'B'}{B'C'}$ forem iguais; iguais, não só, em valor absoluto, como também, em sinal. [A razão $\frac{AB}{BC}$ considera-se *positiva* ou *negativa*, conforme B seja *interior* ou *exterior* ao segmento AC ; e o ser *interior* ou *exterior* a um segmento mantém-se em homologia afim].

A razão $\frac{AB}{BC}$ é um *invariante* da homologia afim.

Em homologia, mesmo não afim, quatro pontos colineares não podem, já, ser transformados em quatro pontos colineares, livremente considerados.

Para que dois grupos, $(ABCD)$ e $(A'B'C'D')$, de quatro pontos colineares, cada um, se possam transformar, um no outro, é preciso que se verifiquem certos requisitos.

Em homologia não afim, deve poder-se encontrar um *invariante*, que dependa de quatro pontos colineares e que exprima se dois grupos se possam ou não transformar, um no outro.

Mostremos que a expressão $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ é tal invariante.

É manifesto que os dois grupos, $(ABCD)$ e $(A'B'C'D')$, se podem ou não transformar, um no outro, conforme possam ou não ser obtidos como secções dum mesmo feixe de rectas, d_a, d_b, d_c, d_d , concorrentes num ponto I .

Mostremos, então, que, se os grupos forem secções do mesmo feixe, se tem

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

Tiremos (fig. 10) as rectas, BXY e $B'X'Y'$, paralelas a d_a ,

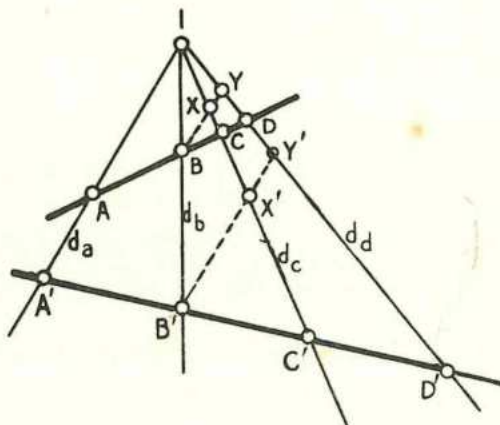


Fig. 10

pelos pontos B e B' , sendo os pontos X e X' intersecções com d_c , Y e Y' , intersecções com d_d .

Consideremos, em 1.º lugar, sòmente valores absolutos.

Verifica-se :

$$\left| \frac{CA}{CB} \right| = \left| \frac{AI}{BX} \right|, \left| \frac{DA}{DB} \right| = \left| \frac{AI}{BY} \right|, \text{ donde, } \left| \frac{CA}{CB} \right| : \left| \frac{DA}{DB} \right| = \left| \frac{BY}{BX} \right|;$$

$$\left| \frac{C'A'}{C'B'} \right| = \left| \frac{A'I}{B'X'} \right|, \left| \frac{D'A'}{D'B'} \right| = \left| \frac{A'I}{B'Y'} \right|, \text{ donde, } \left| \frac{C'A'}{C'B'} \right| : \left| \frac{D'A'}{D'B'} \right| = \left| \frac{B'Y'}{B'X'} \right|;$$

$$\left| \frac{BY}{BX} \right| = \left| \frac{B'Y'}{B'X'} \right|. \text{ Portanto } \left| \frac{CA}{CB} \right| : \left| \frac{DA}{DB} \right| = \left| \frac{C'A'}{C'B'} \right| : \left| \frac{D'A'}{D'B'} \right|.$$

Consideremos, agora, os sinais das razões :

Verifica-se que a expressão $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ tem valor positivo ou negativo conforme os pontos C e D não separam ou separam os pontos A e B .

Visto que *separar ou não separar* são propriedades que se mantêm em homologia, resulta que, também, as expressões

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \quad \text{e} \quad \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$$

têm o mesmo sinal. Temos pois, em grandeza e sinal

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$$

e fica estabelecido que a expressão $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ é um *invariante* da homologia.

A expressão considerada $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, razão de duas razões, é conhecida pelo nome de *dupla razão* ou *razão anarmónica*, e pode, naturalmente, também, dizer-se *razão projectiva*.

b) Por homologia, podem, transformar-se três rectas distintas, a, b, c , tiradas, arbitrariamente, por um mesmo ponto A , em três rectas distintas, a', b' e c' , tiradas, arbitrariamente, por um ponto A' .

1.º) Uma maneira imediata de resolver o problema consiste em dispor os dois pontos, A e A' de maneira que se justaponham duas rectas correspondentes, a e a' , por exemplo (fig. 11 (a)).

O eixo t da homologia é, então, a recta que une os pontos $b b'$ e $c c'$. Para centro da homologia, pode ser tomado, arbitrariamente, qualquer ponto I da recta AA' , distinto, porém, dos pontos A e A' .

2.º) Podem, porém, ser impostos os *pontos duplos*, D_a, D_b, D_c , nos quais se devem intersectar as rectas homólogas, a e a' , b e b' , c e c' , respectivamente.

Neste caso, não temos a liberdade de justapormos duas rectas homólogas, porque, mesmo, naturalmente, sucederá que qualquer das rectas consideradas não venha justapor-se à sua correspondente.

Suponhamos, então, que sejam impostos os pontos D_a, D_b e D_c , nos quais se devem intersectar os pares de rectas, (a, a') , (b, b') , (c, c') (fig. 11 (b)). Os três pontos, D_a, D_b e D_c são colineares e pertencem ao eixo t da homologia.

O problema reduz-se a efectuar as duas operações seguintes :

1.^a — Determinar nos feixes, $A(abc)$ e $A'(a'b'c')$, secções congruentes à pontual $t(D_a D_b D_c)$. [Esta operação foi, já, considerada no problema anterior].

2.^a — Justapor, uma à outra, as secções obtidas.

Nota: Acabámos de ver que, em homologia não afim, três rectas, a, b e c , concorrentes num mesmo ponto A , podem, sempre, ser transformadas em três rectas, a', b' e c' , concorrentes num ponto A' ; podem, mesmo, ser transformadas em três rectas paralelas, quaisquer.

Em homologia afim, a transformação, também, é possível, mas, com as restrições seguintes : não se podem transformar concorrentes

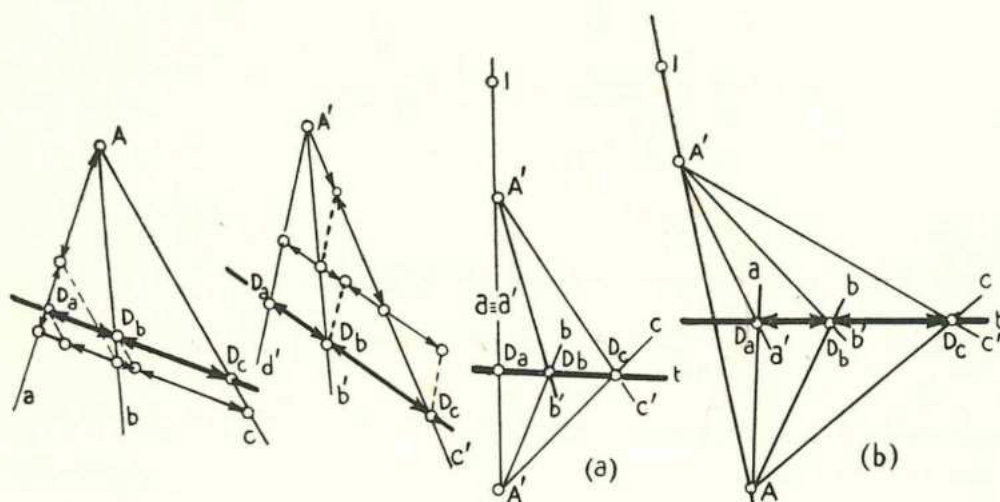


Fig. 11

em paralelas, paralelas em concorrentes, nem paralelas noutras paralelas, livremente tomadas.

Em homologia, mesmo não afim, quatro rectas concorrentes não podem, já, ser transformadas em quatro rectas concorrentes, livremente consideradas.

É manifesto que, para que um grupo de quatro rectas, $(abcd)$, concorrentes num ponto S , se possam transformar num grupo, $(a'b'c'd')$, de quatro rectas concorrentes num ponto S' , é condição necessária e suficiente que se possam determinar secções, $(ABCD)$ e $(A'B'C'D')$, congruentes.

Vimos que secções dum mesmo feixe de quatro rectas têm a mesma *razão projectiva*. Esta razão pode, também, dizer-se, e dizemos a *razão projectiva* do feixe.

A existência de secções congruentes implica que os dois feixes

tenham a mesma *razão projectiva*; e, se os dois feixes tiverem a mesma *razão projectiva*, sempre, em qualquer deles se pode determinar uma secção que seja congruente duma secção feita no outro e, sempre, portanto, um feixe se pode transformar no outro, por homologia.

c) Por homologia, pode transformar-se qualquer triângulo ABC , num triângulo $A'B'C'$ de forma e dimensões dadas. A recta limite, à parte restrições evidentes, pode ser, arbitrariamente, fixada.

Exemplo do problema (fig. 12):

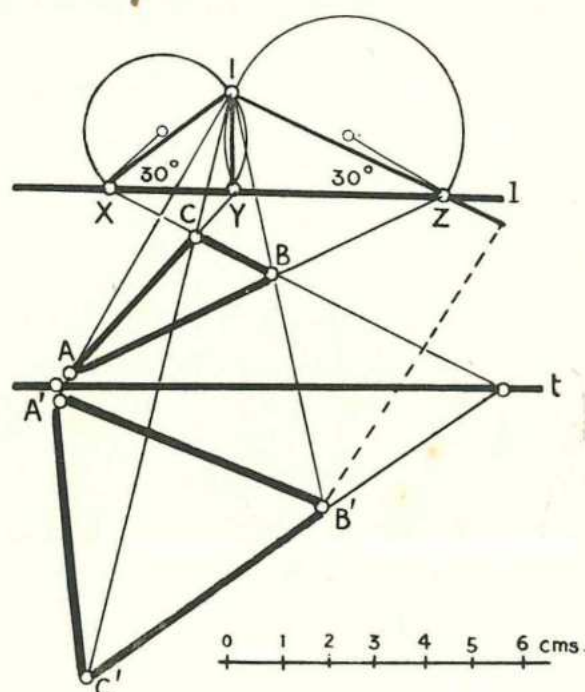


Fig. 12

Transformar o triângulo ABC , dado, num triângulo equilátero, $A'B'C'$, de 6 cms de lado.

Fixou-se, arbitrariamente, a recta limite l . [A recta limite l não pode, manifestamente, passar por qualquer dos vértices, A , B ou C , do triângulo dado].

Fixada a recta limite l , ficam fixados os pontos limites, X , Y e Z , dos lados BC , CA e AB , do triângulo, respectivamente.

O centro de homologia tem de ser um ponto I tal que $X\hat{I}Y = \hat{C}'$ e $Y\hat{I}Z = \hat{A}'$. Estas duas condições determinam o ponto I . No caso presente, $\hat{C}' = \hat{A}' = 60^\circ$; o ponto I obtém-se construindo sobre XY e YZ , como cordas, arcos capazes de 60° .

Determinado o centro de homologia, I , una-se com os vértices

A , B e C e com os pontos limites X , Y e Z . Os vértices, A' , B' e C' , do triângulo pedido, ficam respectivamente nas rectas IA , IB e IC ; os lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, ficam respectivamente, paralelos às rectas IX , IY e IZ . Para determinar, por exemplo, o lado $A'B'$, temos, pois, apenas, de resolver o problema de inscrever nas duas rectas, IA e IB , um segmento, $A'B'$ de 6 cms e paralelo à recta IZ . Obtido um lado, os outros dois são de construção imediata.

d) Por homologia, pode transformar-se qualquer quadrilátero, $ABCD$, num quadrilátero, $A'B'C'D'$, de forma e dimensões dadas.

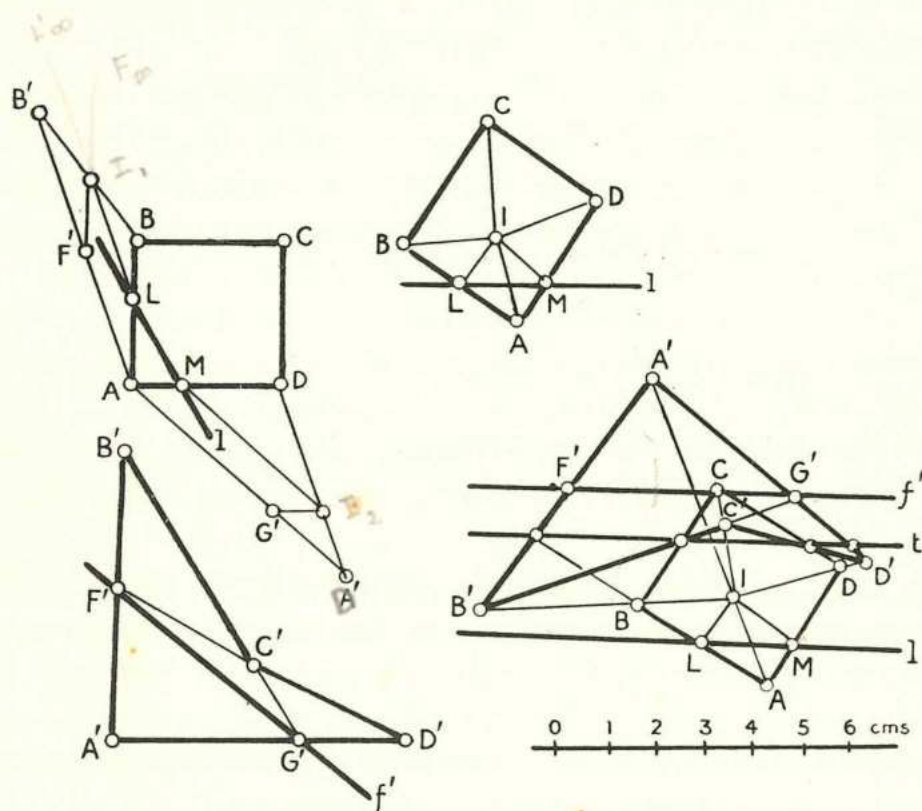


Fig. 13

[No problema anterior, transformação dum triângulo noutra qualquer, há certa indeterminação, visto que se pode dispor, arbitrariamente, da recta limite. Esta circunstância é de molde a pôr o problema mais forte, de transformar qualquer quadrilátero noutra, de forma e dimensões dadas. É o problema, agora em questão].

No problema presente, a recta limite não pode ser, arbitrariamente fixada. Tem de ser determinada.

Exemplo do problema (fig. 13).

Transformar, por homologia, um quadrado, $ABCD$, de 3 cms de lado, num quadrilátero côncavo, $A'B'C'D'$, assim determinado:

a) $A'B' = A'D' = 6$ cms; b) $A'B'$, perpendicular a $A'D'$;

c) O lado $B'C'$ intersecta o lado $A'D'$ no ponto G' , tal que, $A'G' = \frac{2}{3} \cdot A'D'$; d) O lado $D'C'$ intersecta o lado $A'B'$ no ponto F' , tal que, $A'F' = \frac{1}{2} \cdot A'B'$.

Verifiquemos que as rectas de fuga, f' , e limite, l , ficam impostas e determinemo-las.

Recta de fuga f' . O ponto F' é homólogo do ponto de intersecção dos lados DC e AB do quadrado; é homólogo, portanto, dum ponto do infinito, e, por isso, é um ponto de fuga. Por igual motivo, o ponto G' é, também, de fuga. Por consequência, a recta f' , que une os pontos F' e G' é a recta de fuga.

Recta limite l . Os pontos colineares A' , B' e F' correspondem aos pontos colineares A , B e F (F , o ponto do infinito de AB), respectivamente. Por estes três pares de pontos correspondentes, fica, inteiramente, determinada a correspondência entre os pontos das rectas AB e $A'B'$. O ponto limite, L , da recta AB é o ponto que tem, para correspondente, o ponto, L'_∞ , do infinito, da recta $A'B'$; encontra-se, por isso, fixado. Determinou-se na fig. 13, deslocando a pontual, $A'B'F'$, de forma a vir A' sobrepor-se a A .

Do mesmo modo se determinou o ponto limite M da recta AD . A recta limite, l , encontra-se determinada; é a recta que une os pontos L e M .

Determinação do centro de homologia: A recta limite l e a recta de fuga f' devem ficar paralelas. Começemos, pois, por dispor os quadriláteros, de modo que seja verificada esta condição.

Sendo I o centro de homologia, as rectas LI e MI são paralelas às imagens de AB e AD isto é, a $A'B'$ e $A'D'$. Tirando por L e M , paralelas a $A'B'$ e $A'D'$, determina-se, portanto, I .

Considerando o quadrilátero imagem, de igual modo, se obtém o ponto I , tirando as rectas, $F'I$ e $G'I$, paralelas, respectivamente, às rectas originais, AB e AD .

Naturalmente, as duas construções não conduzirão ao mesmo resultado. Se conduzirem, o problema encontra-se resolvido. Se não conduzirem, resta, apenas, deslocar por translação uma, ou as duas figuras, original e imagem, até que os pontos obtidos se sobreponham.

Nota: O problema tem mais de uma solução. Obtemos, com efeito, novas soluções, compondo uma homologia obtida com uma simetria axial que tenha, para eixo, o eixo da homologia, ou com uma simetria central, que tenha, para centro, o centro da homologia.

Sejam $A\bar{A}, B\bar{B}, \dots$, perpendiculares tiradas no plano α a t , $\bar{A}, \bar{B}, \dots$, os pontos de intersecção destas perpendiculares com t . As rectas $\bar{A}(A), \bar{B}(B), \dots$, são perpendiculares a t . As rectas $A(A), B(B), \dots$, que unem cada ponto com o seu rebatimento, são paralelas.

Seja O' o ponto de intersecção com π da paralela tirada por O às rectas $A\bar{A}, B\bar{B}, \dots$; O'' , o ponto de intersecção com π da paralela tirada por O às rectas $A(A), B(B), \dots$.

O ponto O'' é o centro da homologia. De facto, consideremos qualquer recta $A'(A)$, que una a projecção, A' dum ponto A , ao seu rebatimento, (A) . Resta ver que a recta $A'(A)$ passa por O'' e, para tanto, basta verificar que intersecta a recta OO'' . Ora, a recta OO'' pertence ao plano $(A)AA'$, por ter o ponto O neste plano e ser

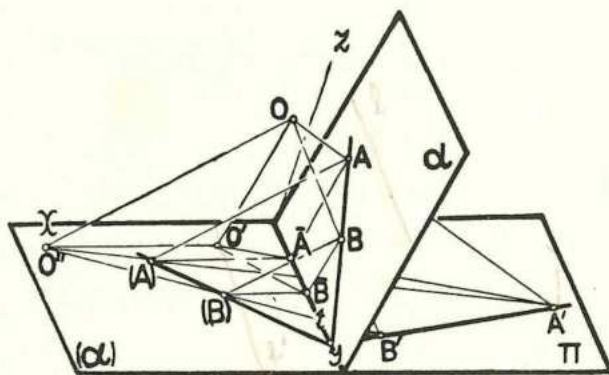


Fig. 15

paralela à recta $(A)A$; portanto, é complana com a recta $A'(A)$ e, por isso, intersecta-a.

As rectas $A'\bar{A}, B'\bar{B}, \dots$ passam por O' . Consideremos, por exemplo, a recta $A'\bar{A}$. Esta recta e a recta OO' estão ambas no plano $\bar{A}AA'$; intersectam-se, portanto, o que implica que a recta considerada passe por O' .

A recta $O''O'$ é perpendicular a t . De facto, o plano $O''O'O$ é perpendicular a t , por conter duas rectas, OO'' e OO' , perpendiculares a t .

Com as considerações que ficam desenvolvidas, podem resolver-se os dois problemas seguintes:

a) Dado o centro de projecção e o plano α , isto é, o traço t e o ângulo φ , de α com o plano de projecção π , determinar a homologia que relaciona o rebatimento com a projecção.

b) Dada a homologia e o ângulo φ , determinar o centro de projecção.

Exercícios resolvidos :

I — Dado o eixo de homologia t , a recta limite l e o triângulo ABC , procurar o centro da homologia que transforma ABC num triângulo equilátero.

Determinar, em seguida, o triângulo homológico, $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$.

Tratámos no texto o problema de transformar qualquer triângulo num triângulo, não só, de forma dada, como também, de dimensões dadas. A recta limite podia, então, também, ser dada; mas o eixo ficava implicado pelas dimensões impostas ao triângulo pedido. No exercício presente, é imposta, apenas, a forma do triângulo pedido; mas impõe-se o eixo da homologia, o que determina as dimensões

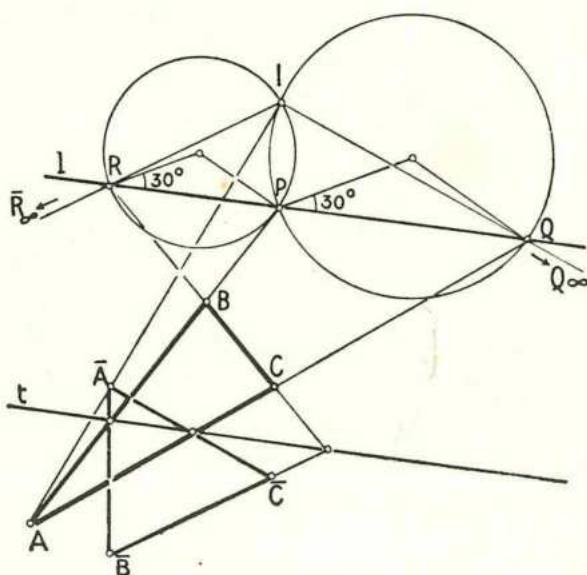


Fig. 16

da figura. Na fig. 16 os pontos limites dos lados, AB , AC e BC , estão designados por P , Q e R , respectivamente.

II — Dado (fig. 17) um quadrilátero $ABCD$, procurar o centro, a recta limite e o eixo de homologia, que transforma $ABCD$ num quadrado, impondo-se, também, que D fique sendo elemento duplo.

Os pontos P e Q , de intersecção dos lados opostos, (AB, CD) e (AD, BC) , determinam a recta limite l ; o centro S da homologia deve estar na circunferência que admite PQ como diâmetro e na circunferência que admite RT como diâmetro, visto serem rectos os ângulos dos lados e das diagonais dum quadrado.

Traçado o eixo que é a paralela a l tirada por D , facilmente se determina o quadrado homólogo, $\bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D}$.

Cónicas

Cónica — é toda a curva homológica duma circunferência.

A cónica diz-se:

Elipse — se todos os seus pontos são próprios ;

Hipérbole — se tem dois pontos impróprios;

Parábola — se tem um ponto impróprio, sòmente.

A imagem homológica duma circunferência:

É uma *elipse*, quando a circunferência não tem qualquer ponto

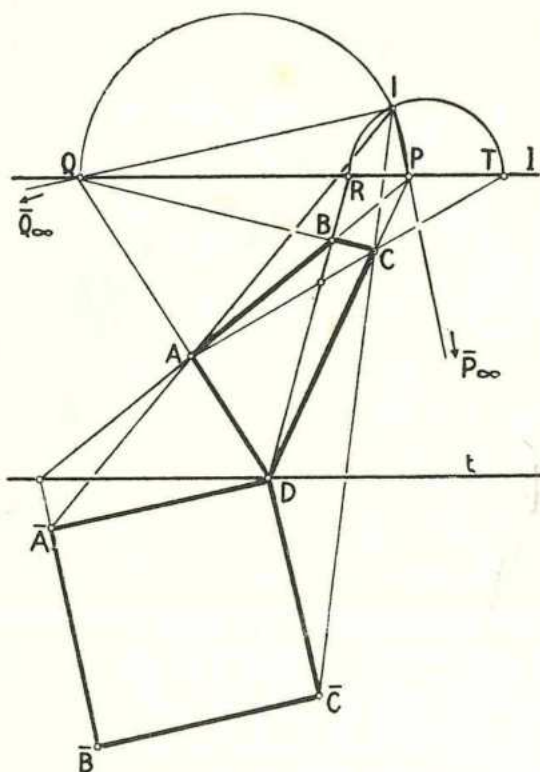


Fig. 17

comum com a recta limite, porque, então a imagem da circunferência não tem pontos do infinito.

É uma *hipérbole*, quando a circunferência intersecta a recta limite em dois pontos, L e M , porque, então, a imagem da circunferência tem dois pontos no infinito, precisamente, os pontos, L'_∞ e M'_∞ , correspondentes dos pontos L e M .

É uma *parábola*, quando a *circunferência* for tangente à recta limite, num ponto T , porque, então, a imagem da circunferência tem, precisamente, um ponto no infinito, o ponto, T'_∞ , homólogo do ponto T .

Circunferência:

Uma circunferência é transformada em circunferência por qualquer homotetia. A circunferência deve, assim, ser considerada

como caso particular de cônica, de cônica sem pontos no infinito, portanto, caso particular de elipse.

Mas, nem só a homotetia é homologia capaz de transformar circunferências em circunferências; pelo contrário, em qualquer homologia não afim, podem-se, sempre, considerar circunferências que se transformam em circunferências.

Sobre este assunto, pode enunciar-se o teorema seguinte:

Teorema — Em homologia não afim, é condição suficiente e, também, necessária, para que a imagem duma circunferência

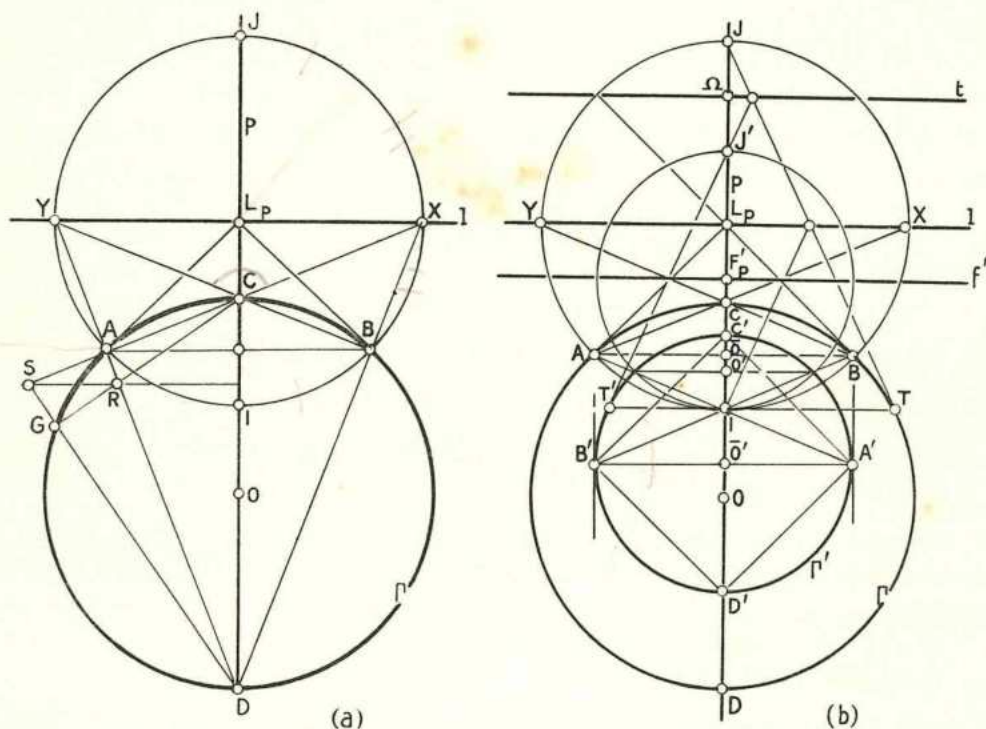


Fig. 18

seja circunferência, que a circunferência pertença ao feixe de circunferências que tem, para pontos duplos, os pontos isogonais; ou, por outras palavras, que a circunferência intersecte, ortogonalmente, a circunferência que tem, para diâmetro, o segmento IJ que une os pontos isogonais.

Dem.: A condição é necessária:

Seja (fig. 18, (a), (b)) Γ uma circunferência que seja transformada numa circunferência Γ' ; l , a recta limite; L_p , o ponto limite principal, p , a recta principal. Tiremos, por L_p , tangentes, $L_p A$ e $L_p B$, a Γ e sejam A e B os pontos de contacto. As imagens destas tangentes, $L_p A$ e $L_p B$ são, necessariamente, paralelas à recta principal.

Resulta, por isso, que a imagem $A'B'$ da corda dos contactos AB , é um diâmetro de Γ' e, precisamente, o diâmetro que é perpendicular à recta principal. Assim, a imagem $A'B'$ de AB é paralela à recta limite e isto implica que a corda AB , também, o seja. E se AB é paralela à recta limite, o centro O da circunferência Γ deve estar na recta principal p .

Verificado que o centro O da circunferência Γ tem de estar sobre a recta principal p , designemos por C e D os pontos de intersecção de Γ com p . Tracemos as cordas AC e BC e designemos por X e Y os seus pontos limites. Segue-se, agora, que, para que a imagem Γ' de Γ seja uma circunferência, é necessário que o ângulo $A\hat{C}B$ tenha, por imagem, um ângulo, $A'\hat{C}'B'$, recto. Para tanto, é necessário que os pontos limites X e Y fiquem sobre a circunferência que tem, para diâmetro, o segmento IJ que une os pontos isogonais e, portanto, para centro, o ponto limite principal L_p . Mas, se esta circunferência passa pelos pontos X e Y , ela passa, também, pelos pontos A e B . Com efeito, verifica-se, imediatamente, pela figura, que a recta ACX é bissectriz do ângulo $L_p\hat{A}B$ e, portanto, paralela a uma das bissectrizes dos ângulos formados pela recta limite, l , e pela recta L_pA . Por consequência, $\overline{L_pX} = \overline{L_pA}$.

Por igual motivo, $L_pY = L_pB$. A circunferência Γ passa, pois pelos pontos A e B .

Nestas condições, a circunferência Γ tem de cortar, ortogonalmente a circunferência que tem para diâmetro o segmento IJ , que une os pontos isogonais; *c. q. p.*

A condição é suficiente:

Começamos por verificar que se a circunferência Γ intersecta, ortogonalmente, a circunferência de diâmetro IJ , as rectas BD e AD passam, respectivamente, pelos pontos X e Y . Basta que verifiquemos, que, AD passa por Y . Ora, vê-se, imediatamente, pela figura, que AD é bissectriz do ângulo suplementar de $L_p\hat{A}B$, portanto, é bissectriz dum dos ângulos formados pela recta limite l , e a recta L_pA , logo, intersecta l num ponto que dista L_pA de L_p , ou seja no ponto Y ; *c. q. p.*

Assim, a homologia transforma o quadrilátero $ACBD$ num rectângulo, $A'C'B'D'$, que é, mesmo, um quadrado, por serem perpendiculares as suas diagonais, $A'B'$ e $C'D'$.

Resta-nos, agora, verificar que qualquer ponto G de Γ é transformado num ponto G' da circunferência Γ' circunscrita ao quadrado $A'C'B'D'$ e, para tanto, basta verificar que a imagem, $C'\hat{G}'D'$ do ângulo recto, $C\hat{G}D$, é igualmente, um ângulo recto. Designemos por R

o ponto de intersecção de CG e AD ; por S , o ponto de intersecção de DG e CA . Consideremos o triângulo CRD . As rectas CA , SR e DG são as alturas deste triângulo. Quando passamos à imagem, as imagens $C'A'$ e $S'R'$ das alturas CA e SR continuam a ser alturas da imagem $C'R'D'$ do triângulo CRD ; portanto, também, a imagem $D'G'$ da altura DG continua a ser altura e, assim, fica estabelecido que o ângulo $C'\hat{G}D'$ é recto; *c. q. p.*

Centro e contracentro:

Como já se disse, em homologia não afim e não homotetia, o *ser ponto médio* não é propriedade que se mantém. Daí, o *ser centro* não é propriedade, também, que se mantenha.

O centro da circunferência original, Γ , não tem para imagem, o centro da circunferência imagem, Γ' . Chamaremos *contracentro* da circunferência original Γ o ponto $\bar{O}$ que tem, para imagem, o centro, $\bar{O}'$, da circunferência imagem, Γ' ; contracentro da circunferência imagem, Γ' , o ponto O' que tem, para original, o centro, O , da circunferência original, Γ .

O contracentro, $\bar{O}$, é o ponto médio da corda AB que une os pontos de intersecção da circunferência, Γ , com a circunferência de diâmetro IJ . Em virtude da reciprocidade entre original e imagem, o contracentro, O' , é o ponto médio da corda que une os pontos de intersecção da circunferência, Γ' , com a circunferência de diâmetro IJ' .

[Nota: Encontra-se no conceito de pólo-polar da matemática moderna um invariante da homologia. *O ser pólo e polar mantém-se em homologia.* O conceito de centro duma cónica pode exprimir-se pelo conceito pólo-polar. Frequentemente, mesmo em livros de carácter elementar, encontra-se definido centro como sendo o pólo da recta do infinito, o que vale tanto, como dizer que, numa homologia, o centro da imagem duma circunferência (cónica) é a imagem do pólo da recta limite. É, porém, nosso propósito não considerar a teoria da polaridade].

Homologias que transformam circunferências em si mesmas, isto é, que admitem circunferências como circunferências duplas (fig. 19).

É manifesto que, se uma homologia transformar uma circunferência Γ em si mesma, isto é, admitir Γ como *circunferência dupla*, tal homologia é, necessariamente, involutiva.

Em qualquer homologia involutiva, porém, qualquer circun-

ferência, Γ , que seja transformada em circunferência, é, necessariamente, transformada em si mesma; é, pois, circunferência dupla da transformação.

De facto:

Numa homologia involutiva, a recta limite, l , sobrepõe-se à recta de fuga f' e, portanto, também, o ponto isogonal J se sobrepõe à sua imagem J' ; e estes dois pontos sobrepõem-se ao ponto duplo principal, W ⁽¹⁾. Uma circunferência, Γ , que seja transformada em circunferência, intersecta, portanto, ortogonalmente, a circunferência de diâmetro IW ; e, igualmente, a sua imagem, Γ' , intersecta,

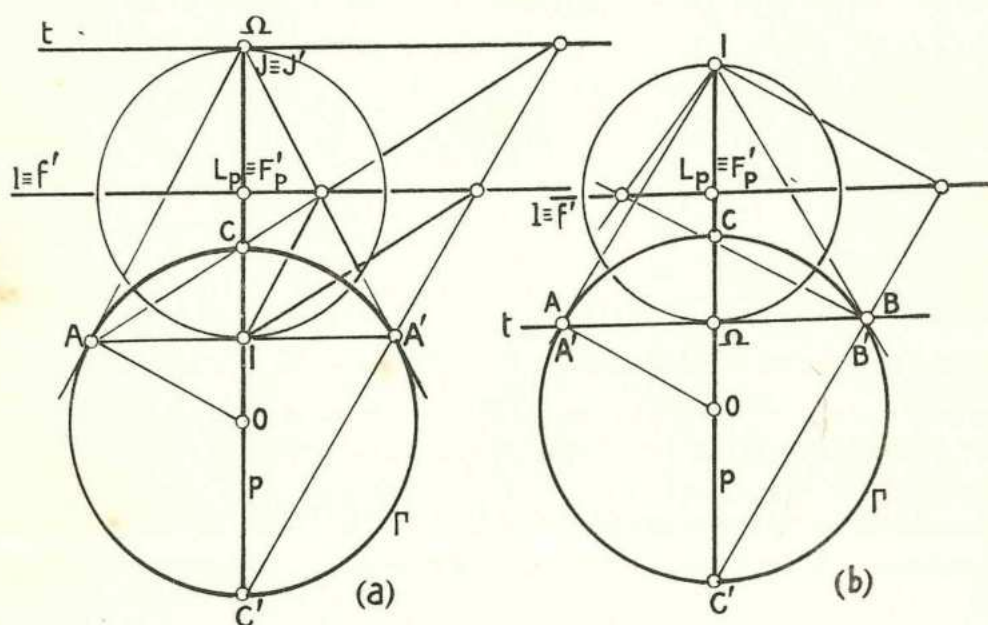


Fig. 19

também, ortogonalmente, a mesma circunferência de diâmetro IW . É fácil concluir que, as circunferências Γ e Γ' se sobrepõem.

São possíveis duas hipóteses: *a)* o centro, I , da homologia é interior a Γ ; *b)* o centro, I , da homologia é exterior a Γ .

a) I é interior a Γ (fig. 19 (a)):

Consideremos a paralela, AA' tirada por I ao eixo, t , da homologia e sejam A e A' os pontos de intersecção desta paralela com Γ . Por a homologia ser involutiva, necessariamente, A é transformado em A' e, também, A' em A . Assim, a circunferência imagem, Γ' , passa pelos pontos A e A' e, como tem de intersectar, ortogonalmente, a circunferência de diâmetro IW ⁽¹⁾, necessariamente, é a mesma que Γ ; *c. q. p.*

⁽¹⁾ Na fig. 19, o ponto duplo principal está designado pela letra Ω .

b) I é exterior a Γ (fig. 19 (b)).

Por I podem tirar-se duas tangentes, IA e IB , à circunferência Γ . Sejam A e B os pontos de contacto destas tangentes. A circunferência imagem Γ' admite, também, estas mesmas rectas para tangentes com os mesmos pontos de contacto; logo coincide com a circunferência original Γ ; *c. q. p.*

Queremos agora mostrar que :

Qualquer ponto, I , no plano duma circunferência, Γ , interior ou exterior à circunferência, mas não sobre ela, é centro duma homologia que transforma a circunferência, Γ , em si mesma.

Temos a considerar duas hipóteses : *a) o ponto I é interior à circunferência Γ ; b) o ponto I é exterior à circunferência Γ .*

a) I é interior a Γ (fig. 19 (a)):

Construamos a recta p , que une o ponto I com o centro O de Γ ; tiremos a recta AA' , perpendicular em I a p , e designemos por A e A' os pontos de intersecção desta recta com Γ ; tracemos as tangentes, AW e $A'W$ ⁽¹⁾, a Γ , nos pontos A e A' , e designemos por W o ponto de intersecção destas tangentes. Tracemos, finalmente, a perpendicular, t , à recta p , no ponto W .

A homologia involutiva de centro, I , e eixo, t , transforma Γ em si mesma.

Para se estabelecer esta conclusão, basta demonstrar que a circunferência de diâmetro IW intersecta ortogonalmente a circunferência Γ e, para tanto, basta verificar que a potência do ponto O , relativamente à circunferência de diâmetro IW , é igual ao quadrado do raio de Γ , isto é, que $\overline{OI} \cdot \overline{OW} = \overline{OA}^2$.

Ora, do triângulo rectângulo, OAW ($OA\Omega$ na fig.), resulta,

$$\overline{AI}^2 = \overline{OI} \cdot \overline{IW} = \overline{OI} (\overline{OW} - \overline{OI}) = \overline{OI} \cdot \overline{OW} - \overline{OI}^2;$$

donde,

$$\overline{OI} \cdot \overline{OW} = \overline{AI}^2 + \overline{OI}^2 = \overline{OA}^2; \text{ c. q. p.}$$

b) I é exterior a Γ (fig. 19 (b)):

Tracemos as tangentes IA e IB à circunferência Γ , tiradas por I , e designemos por A e B os seus pontos de contacto; construamos a recta t que une os pontos A e B ; tiremos, finalmente, por I , a perpendicular p à recta t e designemos por W ⁽¹⁾ a intersecção de p com t . A recta p passa pelo centro O da circunferência Γ .

⁽¹⁾ Na fig. 19, como já se disse em nota, o ponto W está designado pela letra Ω .

A homologia de centro I e eixo t transforma a circunferência Γ em si mesma.

Para estabelecer esta conclusão, basta mostrar que a circunferência Γ intersecta, ortogonalmente, a circunferência de diâmetro IW e, para tanto, basta mostrar que a potência do ponto O , relativamente a esta circunferência, é igual ao quadrado do raio de Γ , isto é, que $\overline{OI} \cdot \overline{OW} = \overline{OA}^2$.

Ora, do triângulo rectângulo, OAI , resulta;

$$\overline{AW}^2 = \overline{OW} \cdot \overline{WI} = \overline{OW} (\overline{OI} - \overline{OW}) = \overline{OW} \cdot \overline{OI} - \overline{OW}^2,$$

donde :

$$\overline{OW} \cdot \overline{OI} = \overline{AW}^2 + \overline{OW}^2 = \overline{OA}^2; \text{ c. q. p.}$$

Estabelecia-se, por considerações análogas, que :

Qualquer recta, t , no plano duma circunferência, Γ , secante ou não secante da circunferência, mas não tangente, é eixo duma homologia que transforma a circunferência Γ em si mesma.

Nota: Ficou estabelecido que, a cada ponto do plano duma circunferência Γ , não sobre Γ , corresponde uma recta t , unívocamente determinada, tal que a homologia de centro em I e eixo t transforma Γ em si mesma.

A recta t diz-se a *polar* do ponto I ; o ponto I , o pólo da recta t .

Apenas, porém, nos interessa e queremos destacar o resultado seguinte :

Se as diagonais dum quadrilátero inscrito na cónica Γ passarem pelo ponto I , então : *a)* lados opostos do quadrilátero intersectam-se em t ; *b)* tangentes em vértices opostos do quadrilátero intersectam-se, igualmente, em t .

Parábola — Diâmetros, eixo e vértice :

Como se disse já, a parábola é a curva homóloga duma circunferência tangente à recta limite.

Seja (fig. 20) l a recta limite; Γ , a circunferência considerada, tangente à recta limite l ; Γ' , a parábola imagem; U , o ponto de contacto de Γ com l ; I , o centro de homologia.

Diâmetros : A imagem do ponto U é o ponto do infinito da parábola imagem Γ' . Consideremos qualquer recta, d , tirada por U . Seja T o 2.º ponto de intersecção de d com Γ ; X , o ponto limite da tangente em T a Γ . Tiremos por X secantes $XA\bar{A}$ e $XB\bar{B}$ de Γ , sendo $A, \bar{A}, B$ e $\bar{B}$ pontos de Γ .

parábola, Γ' , paralelas à tangente a esta parábola no ponto de intersecção com d' .

As rectas, d' , que passam pelo ponto do infinito da parábola dizem-se *diâmetros* da parábola. A direcção da tangente, t' , no ponto de intersecção do diâmetro, d' , com a parábola, diz-se a *direcção conjugada* do diâmetro, d' .

Os diâmetros duma parábola são rectas paralelas entre si e passam pelo ponto do infinito da parábola.

Eixo e vértice: *Eixo* é um diâmetro que é perpendicular à sua direcção conjugada, isto é, é um diâmetro que divide ao meio as cordas que lhe são perpendiculares.

Para determinar o ponto limite do eixo, basta tirar $IY \perp IU$. Uma parábola tem, pois, um *eixo* e, precisamente, um.

Vértice é o ponto de intersecção do eixo com a parábola.

Elipse — centro, diâmetros, eixos e vértices:

A elipse não tem pontos no infinito; a circunferência homóloga não tem, pois, pontos limites, isto é, não intersecta, como já se disse, a recta limite.

Seja (fig. 21) l a recta limite; I , o centro da homologia; t , o eixo da homologia; Γ , a circunferência considerada; Γ' , a sua imagem.

Centro — Designe-se por P o pé da perpendicular baixada do centro de Γ sobre l ; por M e N , os pontos de contacto das tangentes a Γ tiradas por P ; por $\bar{O}$, o ponto médio da corda MN de Γ .

Vamos ver que o ponto $\bar{O}$ goza da propriedade de *contracentro*, isto é, da propriedade de se transformar em centro de figura, portanto, cuja imagem tem a propriedade de *bissectar* as cordas da elipse Γ' , que por ele passam.

Consideremos uma corda AB de Γ , que contenha o ponto $\bar{O}$. Seja $\bar{A}\bar{B}$ uma segunda corda de Γ , que contenha, também, o ponto $\bar{O}$. A homologia involutiva, de centro em $\bar{O}$, que transforma Γ em si mesma, tem para eixo a recta limite, l , e transforma A em B e $\bar{A}$ em $\bar{B}$. Podemos, portanto, concluir que: *a)* as rectas $A\bar{A}$ e $B\bar{B}$ intersectam-se num ponto de l ; *b)* as rectas $A\bar{B}$ e $\bar{A}B$ intersectam-se, igualmente, sobre l . Resulta que o quadrilátero, $A\bar{A}B\bar{B}$, cujas diagonais são as rectas AB e $\bar{A}\bar{B}$ se transforma num paralelogramo, $A'A'B'B'$, de centro em $\bar{O}'$. O ponto $\bar{O}'$, imagem do ponto $\bar{O}$, bissecta, pois, a corda $A'B'$ da elipse Γ' ; *c. q. p.*

Sejam, então, $\overline{A B}$ e $\overline{C D}$ duas secantes da circunferência, Γ , que tenham, ambas, o ponto $\overline{X}$ para ponto limite; $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$, os pontos de intersecção com Γ . A homologia involutiva de centro em $\overline{X}$, e que transforma Γ em si mesma, tem, para eixo, a recta $\overline{A B}$. Por consequência, as duas rectas $\overline{A C}$ e $\overline{B D}$ e as duas rectas $\overline{A D}$ e $\overline{B C}$ ⁽¹⁾ intersectam-se sobre a recta $\overline{A B}$.

Resulta que o quadrilátero, $\overline{A C D B}$, tem para imagem um trapézio $\overline{A' C' D' B'}$, de bases $\overline{A' B'}$ e $\overline{C' D'}$, e este trapézio é tal, que o diâmetro $\overline{A' B'}$ da elipse Γ' une o ponto de cruzamento das diagonais, $\overline{A' D'}$ e $\overline{B' C'}$ ⁽²⁾, ao ponto de cruzamento dos lados não paralelos, $\overline{A' C'}$ e $\overline{B' D'}$. O diâmetro $\overline{A' B'}$ bissecta, pois, as cordas paralelas, $\overline{A' B'}$ e $\overline{C' D'}$, c. q. p.

Dois diâmetros dizem-se conjugados quando a direcção de qualquer deles é a direcção conjugada do outro.

Diâmetros conjugados são diâmetros, tais, que qualquer deles bissecta as cordas paralelas ao outro.

Eixos e vértices — Um diâmetro, que seja perpendicular à direcção conjugada, diz-se *eixo*. Se um diâmetro for eixo, também, igualmente, é eixo o diâmetro conjugado.

Numa elipse há dois eixos e, se a elipse se não reduzir a uma circunferência, dois eixos, precisamente.

C. E. : Os pontos limites, E e $\overline{E}$ de dois diâmetros, que sejam eixos, são tais, que o ângulo $E\hat{I}E$ é recto.

Para resolver o problema da determinação dos pontos limites dos eixos, basta observar que existe uma homologia, com a recta, l , para recta limite, que transforma a circunferência Γ numa circunferência Γ_0 . Nesta homologia, o ponto $\overline{O}$ é contracentro; a imagem de $\overline{O}$ é, portanto, o centro O_0 da circunferência Γ_0 . Assim uma corda $\overline{A B}$ de Γ , que passe pelo ponto $\overline{O}$, é transformada num diâmetro da circunferência Γ_0 . Por consequência, a recta $\overline{A B}$ e a tangente em B a Γ são transformadas em rectas perpendiculares. Sendo I_0 o centro da homologia e X e $\overline{X}$, os pontos limites de $\overline{A B}$ e $\overline{B X}$, o ângulo $X\hat{I}_0\overline{X}$ é, necessariamente, recto.

Determinado o centro I_0 da homologia, o problema da determinação dos pontos limites, E e $\overline{E}$, dos eixos reduz-se a determinar o segmento $E\overline{E}$ da recta limite, l , que é visto sob ângulo recto, tanto do ponto I como do ponto I_0 , problema, unívocamente determinado,

(1) A recta $\overline{B C}$ não está traçada na figura.

(2) A diagonal $\overline{B' C'}$ não está traçada na figura

se os dois pontos, I e I_0 , se não sobrepuserem ou não ficarem simétricos, relativamente à recta limite, l .

O centro I_0 da homologia, que transforma a circunferência Γ em circunferência Γ_0 , e tem a recta l , para recta limite, pertence à circunferência de centro em P e que intersecta, ortogonalmente, a circunferência Γ . Esta circunferência passa pelos pontos M e N .

Vértices — são os pontos de intersecção dos eixos com a

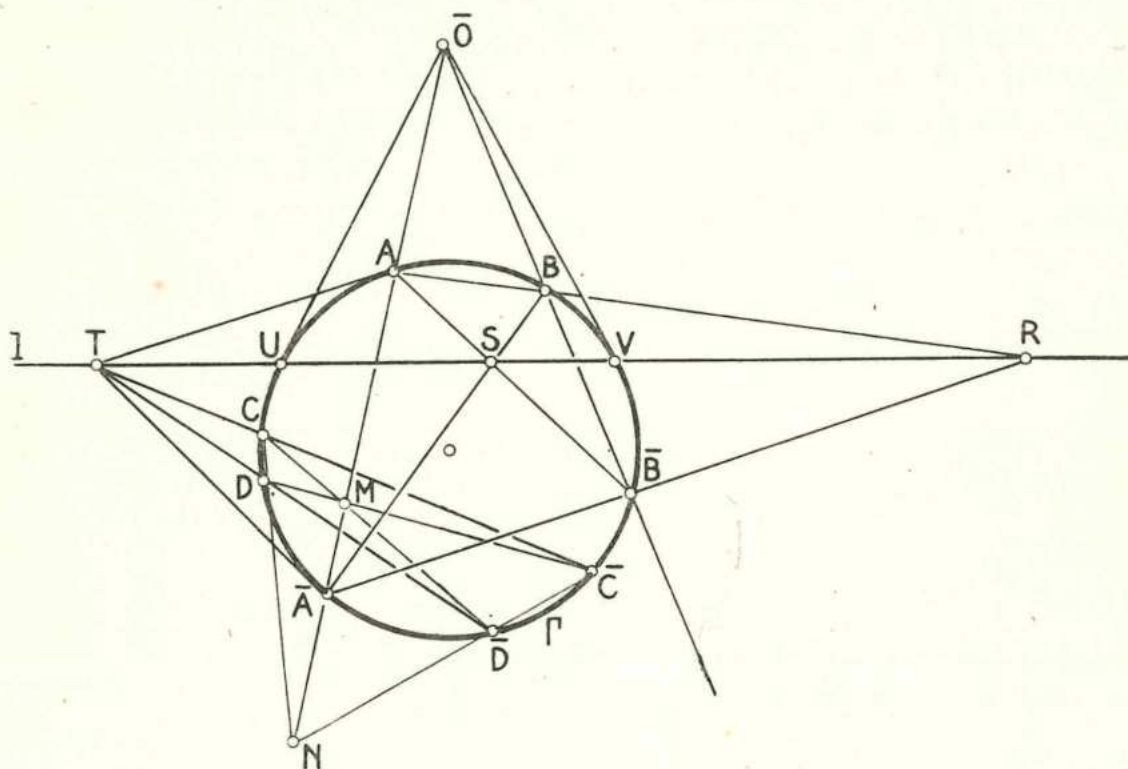


Fig. 22

elipse. Uma elipse, que se não reduz a circunferência, tem, portanto, quatro vértices.

Hipérbole — *Assíntotas, centro, diâmetros, eixos e vértices* :

A hipérbole tem dois pontos no infinito; a circunferência homóloga tem dois pontos limites, intersecta, como já se disse, a recta limite em dois pontos.

Assíntotas — Seja (fig. 22) l a recta limite; Γ , a circunferência considerada; U e V , os pontos de intersecção de Γ com l ; Γ' , a hipérbole imagem; $\bar{O}U$ e $\bar{O}V$, as tangentes a Γ nos pontos U e V ; $\bar{O}$, o ponto de intersecção destas tangentes.

As imagens dos pontos U e V são os pontos do infinito da hipérbole imagem. As imagens das tangentes $\bar{O}U$ e $\bar{O}V$ são as

tangentes nos pontos do infinito da hipérbole. As tangentes à hipérbole nos pontos do infinito dizem-se *as assíntotas*.

Centro — Consideremos, novamente, a fig. 22. Mostremos que o ponto, $\bar{O}$, de cruzamento das tangentes à circunferência Γ nos pontos U e V , goza da propriedade de *contracentro*; portanto, de ponto cuja imagem $\bar{O}'$ bissecta as cordas da hipérbole, que por ele passam.

C. E.: Consideremos uma recta $A\bar{A}$ que passe por $\bar{O}$ e intersecte a circunferência Γ . Sejam A e $\bar{A}$ os pontos de intersecção com Γ .

Seja $B\bar{B}$ uma segunda recta que passe por $\bar{O}$ e intersecte Γ , sendo B e $\bar{B}$ os pontos de intersecção com Γ .

A homologia involutiva, de centro em $\bar{O}$, que transforma a circunferência Γ em si mesma, tem para eixo a recta limite, l , e transforma A em $\bar{A}$ e B em $\bar{B}$. Podemos, portanto, concluir que, tanto as duas rectas, AB e $\bar{A}\bar{B}$, como as duas rectas, $A\bar{B}$ e $\bar{A}B$, se intersectam sobre a recta limite, l . Os pontos de intersecção estão designados na figura 22 pelas letras R e S , respectivamente.

Resulta que o quadrilátero, $AB\bar{A}\bar{B}$, (quadrilátero estrelado), cujas diagonais são as rectas $A\bar{A}$ e $B\bar{B}$, se transforma num paralelogramo, $A'B'\bar{A}'\bar{B}'$, cujas diagonais, $A'\bar{A}'$ e $B'\bar{B}'$ se intersectam no ponto $\bar{O}'$, imagem do ponto $\bar{O}$. O ponto $\bar{O}'$, imagem do ponto $\bar{O}$, bissecta, pois, a corda $A'\bar{A}'$ de Γ' ; *c. q. p.*

O ponto $\bar{O}'$, que goza da propriedade de bissectar as cordas que por ele passam, diz-se o *centro* da hipérbole Γ' .

Diâmetros — Um diâmetro da hipérbole Γ' é qualquer recta que passe pelo centro $\bar{O}'$. Diâmetros são, pois, as imagens das rectas que passam pelo contracentro $\bar{O}$. De ser, no caso da hipérbole, o contracentro exterior à circunferência original Γ , resulta que há, no caso da hipérbole, diâmetros que não intersectam a curva.

Com cada diâmetro associa-se uma direcção, e um diâmetro goza da propriedade de bissectar as cordas paralelas cuja direcção é a direcção que se associa ao diâmetro.

Consideremos (fig. 22) uma recta $A\bar{A}$ que passe por $\bar{O}$ e intersecte Γ nos pontos A e $\bar{A}$. As tangentes, em A e $\bar{A}$, à circunferência Γ , intersectam-se sobre a recta limite, l . Seja T o ponto de intersecção. A imagem, $A'\bar{A}'$ da recta $A\bar{A}$ é um diâmetro da hipérbole Γ' e as tangentes a esta hipérbole nos pontos A' e B' resultam paralelas. A direcção das tangentes diz-se a *direcção conjugada* do diâmetro; e é esta a direcção que se associa ao diâmetro.

Sejam (fig. 22), então, $C\bar{C}$ e $D\bar{D}$, duas secantes da circunferência Γ , que tenham, ambas, o ponto T , para ponto limite; $C, \bar{C}$,

D e $\bar{D}$, os pontos de intersecção com Γ . A homologia involutiva de centro T , e que transforma Γ em si mesma, tem para eixo a recta $A\bar{A}$. Por consequência, as duas rectas, $C\bar{D}$ e $\bar{C}D$, e as duas rectas CD e $\bar{C}\bar{D}$, intersectam-se sobre a recta $A\bar{A}$. Na figura 22 estão designados os pontos de intersecção pelas letras M e N , respectivamente.

Resulta que o quadrilátero $CD\bar{D}\bar{C}$ tem para imagem um trapézio, $C'D'\bar{D}'\bar{C}'$, de bases $C'\bar{C}'$ e $D'\bar{D}'$; e este trapézio é tal, que o diâmetro $A'\bar{A}'$ une o ponto M' de cruzamento das diagonais ao ponto N' de cruzamento dos lados não paralelos. O diâmetro $A'\bar{A}'$ bissecta, pois, as cordas paralelas $C'\bar{C}'$ e $D'\bar{D}'$; *c. q. p.*

Dois diâmetros dizem-se conjugados quando a direcção de qualquer deles é a direcção conjugada do outro.

Diâmetros conjugados são diâmetros tais, que qualquer deles bissecta as cordas paralelas ao outro.

De dois diâmetros conjugados, um intersecta a hipérbole; o outro, não.

Eixos e vértices — Um diâmetro que seja perpendicular à direcção conjugada diz-se *eixo*. Se um diâmetro for eixo, é, também, eixo o diâmetro conjugado. Vamos estabelecer o seguinte resultado:

Uma hipérbole tem, precisamente, dois eixos; um que intersecta a hipérbole; outro que não intersecta.

Os eixos bissectam os ângulos determinados pelas assíntotas.

O problema dos eixos da hipérbole é, porém, de natureza inteiramente diferente do problema dos eixos da elipse.

Consideremos a figura 23. Nesta figura: Γ representa a circunferência original; l , a recta limite; O , o centro de homologia; U e V , os pontos limites de Γ ; $\bar{O}U$ e $\bar{O}V$, as tangentes a Γ nos pontos U e V ; $\bar{O}$, o ponto de cruzamento destas tangentes.

Tracemos a recta $\bar{O}A\bar{A}$, que passa por $\bar{O}$ e intersecta Γ nos pontos A e $\bar{A}$. Seja X o ponto limite da recta $\bar{O}A\bar{A}$; $\bar{X}$, o ponto limite das tangentes em A e $\bar{A}$, a Γ . Tiremos, também, pelo centro de Γ a perpendicular à recta limite, l , e designemos os pontos de intersecção desta recta com a recta limite, l , e a circunferência Γ por L , P e $\bar{P}$, respectivamente.

Começemos por mostrar que, qualquer que seja a recta traçada $\bar{O}A\bar{A}$, se verifica a relação

$$\overline{LX} \cdot \overline{L\bar{X}} = \overline{LU}^2 = \overline{LV}^2$$

Para simplificar o cálculo, transformemos por homologia, que tenha, para recta limite, l , a circunferência Γ na circunferência Γ_0 que tem para diâmetro o segmento UV . O centro desta homologia é o ponto I_0 de intersecção das tangentes comuns às circunferências Γ e Γ_0 . O ponto $\bar{O}$ transforma-se no ponto, $\bar{O}_0$, do

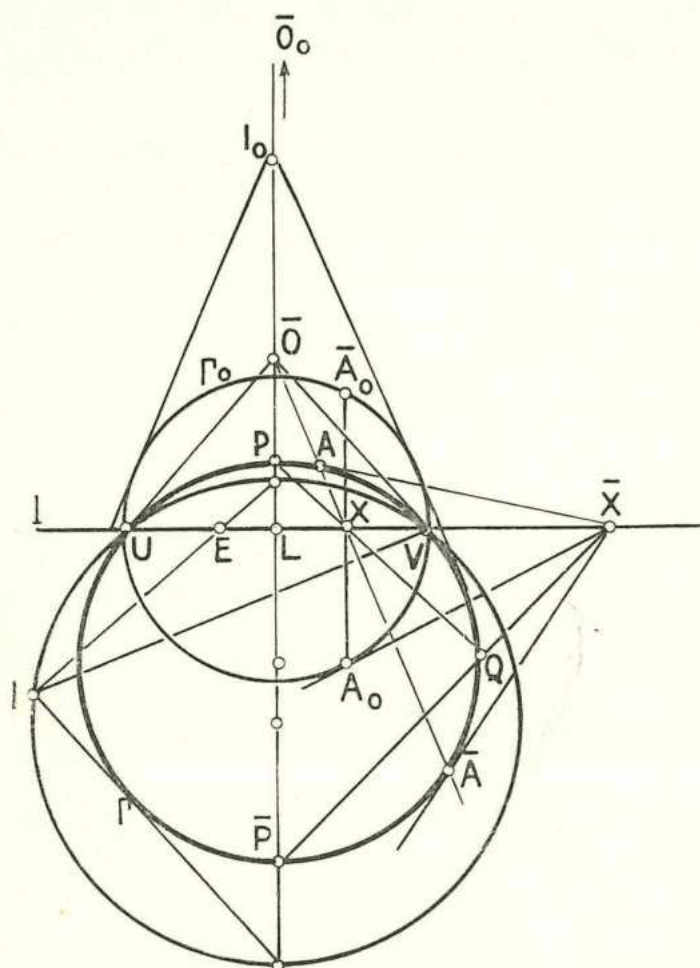


Fig. 23

infinito da recta $I_0 \bar{O}$; a recta $\bar{O} A X \bar{A}$, transforma-se na recta $\bar{O}_0 \bar{A}_0 X_0 \bar{A}_0$, perpendicular em X à recta l ; a tangente $\bar{X} A$ a Γ transforma-se na tangente $\bar{X} A_0$ a Γ_0 .

Temos, então, por ser rectângulo o triângulo $L A_0 \bar{X}$:

$$\overline{A_0 X^2} = \overline{L X} \cdot \overline{X \bar{X}} = \overline{L X} \cdot (\overline{L \bar{X}} - \overline{L X}) = \overline{L X} \cdot \overline{L \bar{X}} - \overline{L X^2};$$

donde,

$$\overline{L X} \cdot \overline{L \bar{X}} = \overline{A_0 X^2} + \overline{L X^2} = \overline{L A_0^2} = \overline{L U^2} = \overline{L V^2}; \text{ c. q. p.}$$

Mostremos, agora que as rectas, PX e $\bar{P}\bar{X}$, são perpendiculares e se intersectam, por isso, num ponto Q da circunferência Γ .

Temos $\overline{LP} \cdot \overline{LP} = \overline{LU}^2$. Portanto, $\overline{LP} \cdot \overline{L\bar{P}} = \overline{LX} \cdot \overline{LX}$

Donde :

$$\frac{\overline{LX}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{L\bar{X}}}$$

Esta relação estabelece que os triângulos rectângulos LPX e $\bar{X}L\bar{P}$ são semelhantes e que, por consequência, são iguais os ângulos $L\hat{P}X$ e $L\hat{\bar{X}}\bar{P}$. Ora, sendo iguais estes ângulos, são, também, semelhantes os triângulos LPX e $Q\bar{X}X$, o que implica que seja recto o ângulo $P\hat{Q}\bar{X}$; *c. q. p.*

Resulta, pois, que existe um par de direcções conjugadas, e, sòmente, também, um, cujos pontos limites X e $\bar{X}$ são vistos do ponto Q sob um ângulo recto. Verifica-se, ainda, que as rectas QX e $Q\bar{X}$ são as bissectrizes dos ângulos determinados pelas rectas QU e QV que unem o ponto Q aos pontos U e V da circunferência Γ .

O raciocínio que acaba de ser feito é aplicável não só à circunferência Γ , mas a qualquer circunferência que passe pelos pontos U e V e, como por qualquer ponto, que não pertença à recta limite, l , se pode tirar uma semelhante circunferência, fica estabelecido o seguinte resultado :

A cada ponto, G , que não pertença à recta limite, corresponde, sempre um par de direcções conjugadas, e um, sòmente, também, cujos pontos limites são vistos do ponto G sob um ângulo recto e os lados deste ângulo bissectam os ângulos determinados pelas rectas que unem o mesmo ponto, G , aos pontos limites, U e V , das assíntotas.

Os pontos limites E e $\bar{E}$ dos eixos são os pontos limites dum par de direcções conjugadas, que são vistos sob ângulo recto do centro I de homologia. Na fig. 23, apresenta-se a circunferência que passa pelos pontos I , U e V . O ponto $\bar{E}$ não se mostra na figura por estar fora dos limites do desenho.

Fica, pois, estabelecido que numa hipérbole existem, precisamente, dois eixos, um que intersecta a hipérbole, outro que não intersecta e que os eixos são as bissectrizes dos ângulos determinados pelas assíntotas.

Vértices — são os pontos de intersecção dos eixos com a hipérbole. Uma hipérbole, tem, portanto, dois vértices.

Na figura 24 mostra-se a hipérbole Γ' , imagem da circunferência Γ . Estão determinadas as assíntotas, o eixo que intersecta a

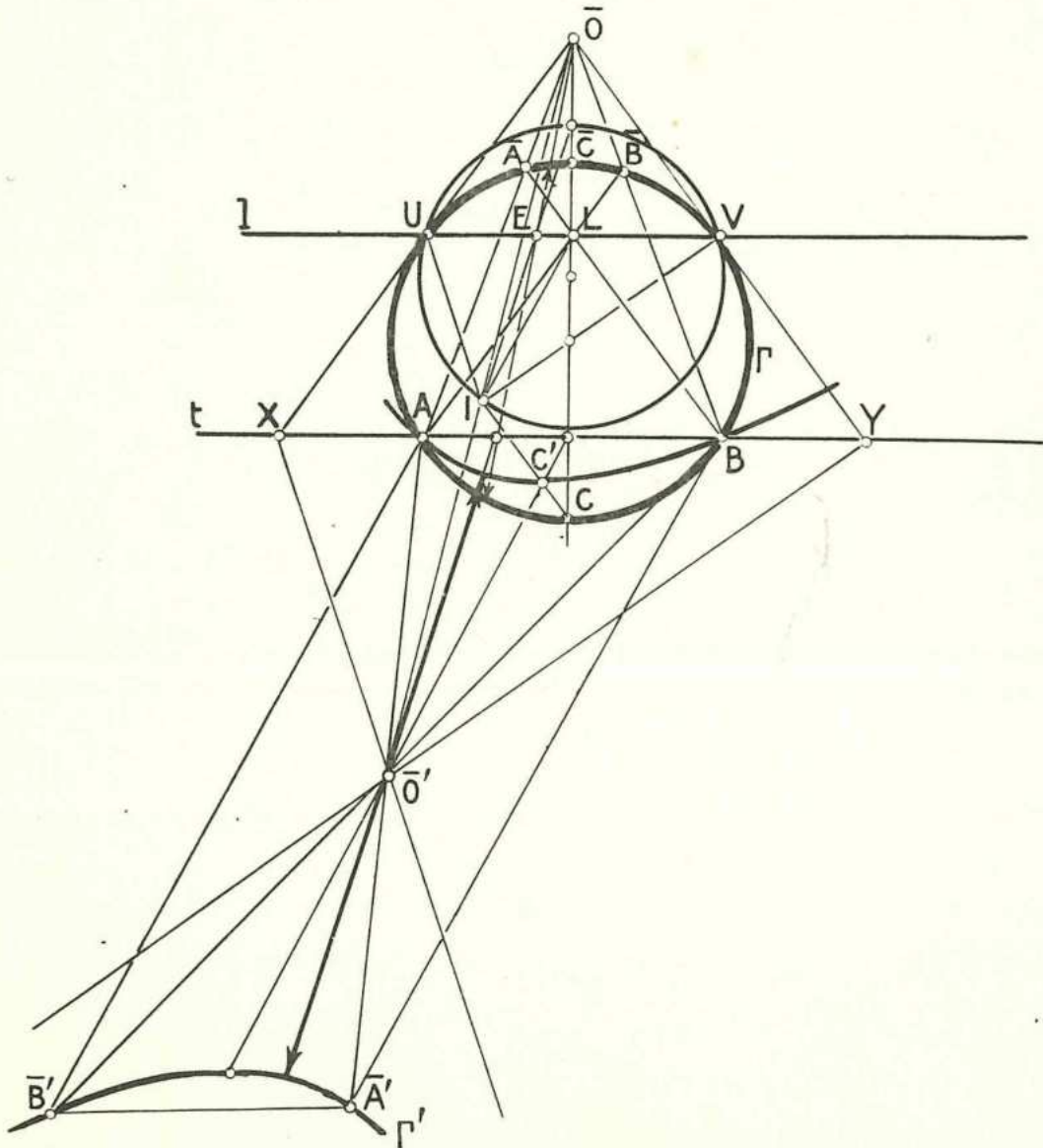


Fig. 24

hipérbole e os vértices. Pode, também, verificar-se, pela figura, que o quadrilátero inscrito em Γ , $\overline{A} B A \overline{B}$, tem para imagem um paralelogramo, $\overline{A'} B A \overline{B'}$, inscrito na hipérbole Γ' e com o centro no centro desta curva.

Problema fundamental:

O problema de que agora nos vamos ocupar e que pode ser considerado como problema fundamental é o problema seguinte:

Problema fundamental — Dada uma cônica Γ' , determinar uma homologia que transforme uma circunferência, Γ , na cônica Γ' .

Vamos tratar dois casos do problema, que são, certamente, os mais gerais que se podem considerar:

I — A cônica Γ' é dada por cinco pontos.

II — A cônica Γ' é dada por cinco tangentes.

I — A cônica Γ' é dada por cinco pontos:

Sejam A', B', C', D' e E' cinco pontos. Estes pontos determinam uma cônica Γ' . Queremos determinar uma circunferência Γ e uma homologia, na qual a cônica Γ' seja a imagem da circunferência.

[Em vista da reciprocidade que existe entre *original* e *imagem*, é de certo modo indiferente que se considere como *original* a circunferência ou a cônica; mas, por princípio, queremos considerar, sempre, a circunferência como figura *original* e a cônica como *imagem*. Por isso, designamos com acentos os elementos relativos à cônica e sem acentos, os elementos relativos à circunferência]. Supomos que três quaisquer dos cinco pontos, A', B', C', D' e E' , não estão em linha recta, pois, evidentemente, nenhuma homologia é capaz de transformar três pontos duma mesma circunferência em três pontos duma mesma recta.

Sabe-se que um paralelogramo inscrito numa circunferência é, necessariamente, rectângulo e que as suas diagonais são diâmetros.

Este princípio marca, naturalmente, um caminho a tomar na resolução do problema proposto. Se conseguirmos transformar por homologia, simultaneamente, o quadrilátero, $A' B' C' D'$, em rectângulo, $A B C D$, e os ângulos $A' \hat{E}' C'$ e $B' \hat{E}' D'$ em ângulos rectos, $A \hat{E} C$ e $B \hat{E} D$, tal homologia transforma, também, a cônica Γ' na circunferência, Γ circunscrita ao rectângulo $A B C D$ e a homologia inversa transforma a circunferência Γ na cônica Γ' .

Apresenta-se, pois, o problema de transformar por homologia, simultaneamente, um quadrilátero, $A' B' C' D'$ em rectângulo, $A B C D$, e dois ângulos, $A' \hat{E}' C'$ e $B' \hat{E}' D'$, em ângulos rectos, $A \hat{E} C$ e $B \hat{E} D$. Mas, se o quadrilátero for transformado em rectângulo e um dos ângulos, em ângulo recto, também, o outro o é.

O problema não é sempre possível.

Começemos por observar, como mostra a figura 25, que um

quadrilátero, $A'B'C'D'$, divide o plano em sete regiões, assim caracterizadas: pode passar-se de qualquer ponto duma região a outro ponto da mesma região sem atravessar os lados do quadrilátero ⁽¹⁾; não se pode passar, pelo contrário, duma região a outra diferente sem atravessar os lados do quadrilátero.

Três das regiões, as regiões numeradas na figura pelos números, 1, 2 e 3, podem dizer-se *quadrangulares*, porque na sua limitação intervêm quatro rectas; as quatro regiões restantes,

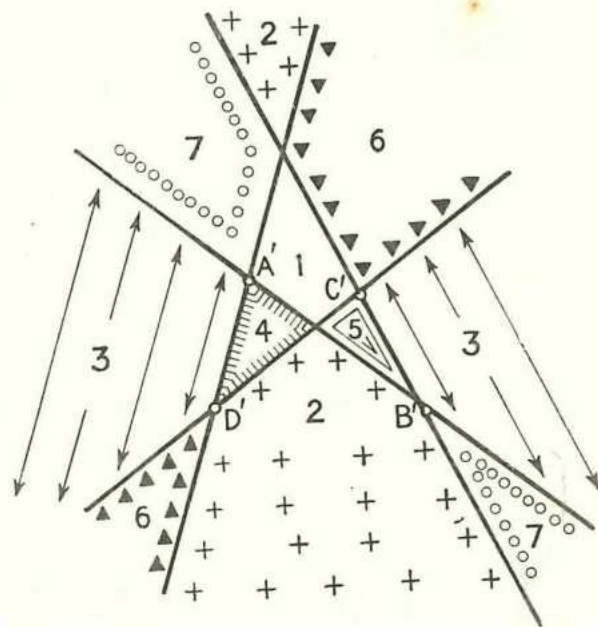


Fig. 25

numeradas na figura pelos números, 4, 5, 6 e 7, podem dizer-se *triangulares*, por na sua limitação intervirem três rectas.

Na figura 26 está apontada a divisão determinada por um paralelogramo.

Podemos, agora, enunciar os seguintes princípios que são de intuição imediata.

Uma circunferência circunscrita a um rectângulo, ou uma elipse circunscrita a um paralelogramo, só podem ter pontos nas regiões triangulares relativas, respectivamente, ao rectângulo ou ao paralelogramo.

Uma hipérbole circunscrita a um paralelogramo só pode ter

(1) Na teoria da homologia, deve conceber-se que se possa passar dum ponto a outro duma recta, caminhando num ou noutro dos dois sentidos possíveis, tal como acontece com a circunferência.

pontos nas regiões quadrangulares relativas ao mesmo paralelogramo.

Estamos agora habilitados a podermos resolver o problema de determinar uma homologia, na qual a cônica, Γ' determinada pelos cinco pontos, A', B', C', D' e E' , seja imagem duma circunferência Γ (fig. 27).

a) Tomemos quatro dos cinco pontos, por exemplo, os pontos A', B', C' e D' ;

b) Com os quatro pontos para vértices, podemos construir dois quadriláteros (um simples, o outro estrelado); construamos,

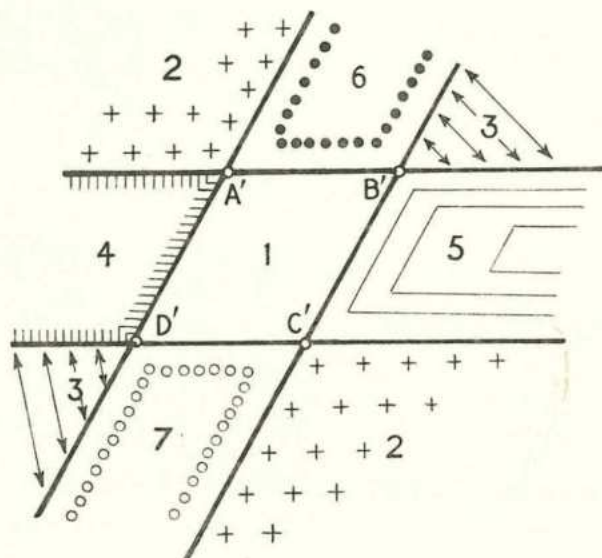


Fig. 26

porém, aquele que determine uma divisão do plano em regiões, tal, que seja triangular aquela em que fica o ponto E' .

Na figura 27 formou-se o quadrilátero $A'B'C'D'$ e este quadrilátero (estrelado) é tal, que o ponto E' está contido numa das regiões triangulares determinadas pelo quadrilátero.

c) Para que o quadrilátero, $A'B'C'D'$, seja imagem dum paralelogramo, $ABCD$, deve a recta de fuga f' , conter os pontos X' e Y' , de intersecção aos lados opostos, $A'D'$, e $B'C'$, e $A'B'$ e $C'D'$, respectivamente.

Está, assim, determinada a recta de fuga f' . É recta que une os pontos, X' e Y' , de intersecção de lados opostos do quadrilátero construído, $A'B'C'D'$.

d) Para que o quadrilátero, $A'B'C'D'$, imagem dum paralelogramo, seja imagem dum rectângulo, $ABCD$, é necessário e basta

que o ângulo $B'\hat{A}'D'$, por exemplo, seja imagem dum ângulo recto, $B\hat{A}D$ e, por este motivo, deve ser recto o ângulo $X'\hat{I}Y'$ que se obtém unindo o centro de homologia, I , aos pontos de fuga, X' e Y' .

Assim, o centro de homologia deve ficar na circunferência de diâmetro $X'Y'$.

e) As diagonais, $A'C'$ e $B'D'$ do quadrilátero são imagens de diâmetros da circunferência Γ circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Por consequência, construindo as rectas, $B'E'$ e $D'E'$, por exemplo,

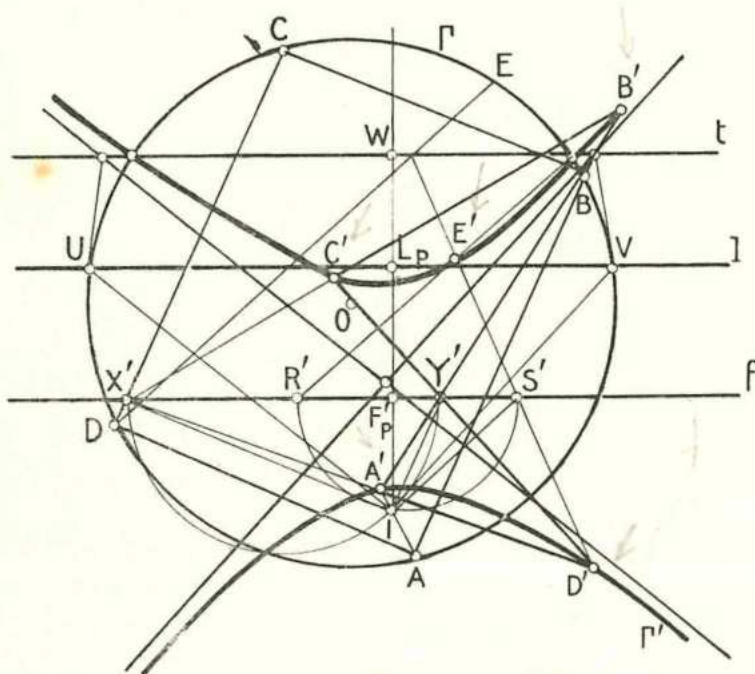


Fig. 27

o ângulo, $B'\hat{E}'D'$, por estas rectas formado, deve ser imagem dum ângulo recto, $B\hat{E}D$.

Determinemos, pois, os pontos de fuga, R' e S' , das rectas, $B'E'$ e $D'E'$.

O centro de homologia, I , deve ficar na circunferência de diâmetro $R'S'$.

As circunferências de diâmetros $X'Y'$ e $R'S'$, consideradas nas alíneas $d)$ e $e)$ determinam o centro de homologia, I .

O eixo de homologia, t , pode ser fixado arbitrariamente (qualquer recta paralela e distinta de f').

A recta limite, l , pode ser determinada pela regra de que o ponto médio do segmento IW é, também, ponto médio do segmento $L_P F'_P$.

Na figura 27, a cônica Γ' é uma hipérbole. Aham-se construídas as assíntotas da hipérbole Γ' , as quais foram obtidas procurando as imagens das tangentes à circunferência Γ nos seus pontos limites U e V . Os pontos de intersecção de t com Γ são, também, pontos da hipérbole Γ' .

II — A cônica é dada por cinco tangentes (fig. 28).

Supomos que três quaisquer das tangentes dadas não passam por um mesmo ponto, pois que três tangentes duma cir-

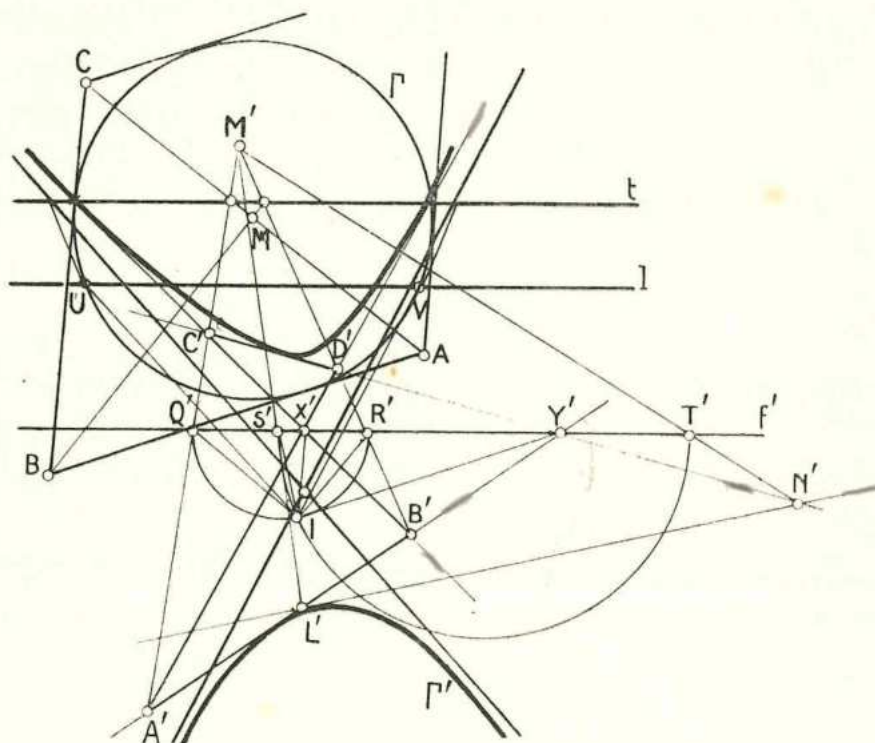


Fig. 28

cunferência não podem passar por um mesmo ponto e nenhuma homologia é capaz de transformar rectas não compontuais em rectas compontuais.

Certamente, o método por que foi tratado o problema anterior suscita o método a seguir na resolução do problema presente. É questão de substituir *paralelogramo inscrito* por *paralelogramo circunscrito*.

Comecemos por observar que: *a)* um paralelogramo circunscrito a uma circunferência é, necessariamente, losango e que as suas diagonais são diâmetros, e diâmetros perpendiculares, da circun-

ferência; *b)* qualquer tangente duma circunferência intersecta lados *adjacentes*, e não *opostos*, de qualquer paralelogramo circunscrito. [Tomemos a designação de *lado* no sentido de segmento que une vértices consecutivos].

a) Deveremos tomar quatro quaisquer das cinco tangentes dadas.

Com as quatro tangentes, podemos formar dois quadriláteros (um simples, o outro, estrelado). Formemos aquele que seja tal, que a quinta tangente intersecte lados *adjacentes*. Na fig. 28 formou-se o quadrilátero $A'B'C'D'$ e este quadrilátero é tal, que a quinta tangente, $L'N'$, intersecta lados *adjacentes*, $A'B'$ e $A'D'$.

b) Para que o quadrilátero, $A'B'C'D'$, seja imagem dum paralelogramo, $ABCD$ (o ponto D não está apresentado na figura, por estar fora dos limites do desenho), é necessário que a recta de fuga, f' , contenha os pontos de intersecção de lados opostos; o ponto X' , de intersecção de $A'D'$ com $A'C'$, e o ponto Y' , de intersecção de $A'B'$ com $C'D'$.

Está, assim, determinada a recta de fuga f' .

c) Para que o quadrilátero, $A'B'C'D'$, imagem dum paralelogramo, seja imagem dum losango, $ABCD$, é necessário e basta que o ângulo das diagonais, $A'C'$ e $B'D'$, seja imagem dum ângulo recto. Determinemos, pois, os pontos de fuga, Q' e R' , das diagonais, $A'C'$, e $B'D'$, respectivamente.

O centro de homologia I deve ficar na circunferência de diâmetro $Q'R'$.

d) Designemos por M' o ponto de cruzamento das diagonais, $A'C'$ e $B'D'$; por L' e N' , os pontos de intersecção da tangente, $L'N'$, com as tangentes, $A'B'$ e $C'D'$.

Para que a tangente $L'N'$ seja imagem duma tangente à circunferência Γ inscrita no losango $ABCD$ é necessário e suficiente que o ângulo $L'M'N'$ seja imagem dum ângulo recto.

Determinemos, pois, os pontos de fuga S' e T' das rectas, $L'M'$ e $N'M'$. O centro de homologia, I , deve ficar na circunferência de diâmetro $S'T'$.

e) As circunferências de diâmetros $Q'R'$ e $S'T'$, consideradas nas alíneas *c)* e *d)*, determinam o centro de homologia I . O eixo de homologia, t , pode ser fixado arbitrariamente (qualquer recta paralela e distinta de f').

Na figura 28 foi, também, determinada a recta limite l . Foram construídas as assíntotas, que são as imagens das tangentes à circunferência Γ nos seus pontos limites U e V . A hipérbole Γ' passa, também, pelos pontos de intersecção de t com Γ .

Devemos transformar o quadrilátero, $Q'_{\infty} G' B' P'_{\infty}$, em losango.

A recta de fuga, f' , une, portanto, os pontos de intersecção de lados opostos, $Q'_{\infty} G'$ e $B' P'_{\infty}$, $G' B'$ e $P'_{\infty} Q'_{\infty}$, isto é, passa por A' e é paralela a $G' B'$. As diagonais do quadrilátero são as paralelas, $G' M'$ e $B' M'$, aos lados $B' P'_{\infty}$ e $G' Q'_{\infty}$, tiradas pelos vértices, G' e B' , respectivamente. Designa-se na figura por M' o ponto de intersecção das diagonais e por X' e Y' , os seus pontos de fuga.

O centro de homologia, I , fica sobre a circunferência de diâmetro $X' Y'$.

Tomemos, agora, a quinta tangente, $D' C'$. Intersecta os lados opostos, $G' Q'_{\infty}$ e $B' P'_{\infty}$ nos pontos D' e F' , respectivamente; de forma que o ângulo, $D' \hat{M}' F'$ deve resultar imagem dum ângulo recto. Procuremos os pontos de fuga dos lados. O lado $D' M'$ é paralelo a f' , de forma que o seu ponto de fuga cai no ponto do infinito de f' . O ponto de fuga do lado $M' F'$ está na figura designado por F'_p e tem de ser o ponto de fuga principal.

O centro de homologia fica, também, na perpendicular a f' em F'_p .

Tomou-se na figura para eixo de homologia a paralela, t , a f' , tirada pelo ponto M' . O centro M da circunferência Γ , que se procura e da qual a parábola Γ' deve ser imagem, coincide, por este motivo, com M' .

Determine-se a recta limite, l . A circunferência Γ pode, agora traçar-se. É a circunferência de centro em $M \equiv M'$ e tangente a l . Designe-se por U o ponto de contacto de Γ com l . O ponto U é o ponto original do ponto do infinito da parábola. Os diâmetros da parábola são paralelos à recta IU .

Determinação do eixo e' , e do vértice, V' . Tiremos IR perpendicular a IU e determinemos o ponto de intersecção, R , de IR com a recta limite, l . O ponto, V , original do vértice, é o ponto de contacto da tangente a Γ tirada por R .

O ponto R está, porém, fora dos limites do desenho e temos de recorrer a uma construção especial.

O ponto V obtém-se, manifestamente, tirando por U a recta UV perpendicular à recta MR (esta recta não está traçada na figura). Tiremos a recta UM , perpendicular a l no ponto U , e designemos por T a intersecção de UM com a recta IR . Consideremos o triângulo MTR . A recta l é uma altura deste triângulo; tracemos, também, a altura MS e designemos por S o ponto de intersecção de MS com l . A recta ST é a terceira altura e, portanto, perpendicular à recta MR . A recta UV , procurada, é, portanto, paralela à recta ST .

Determinemos o ponto, Z , de intersecção de UV com t .

O eixo, e' , da parábola passa por Z e é paralelo a IU . O vértice, V' , é o ponto de intersecção de e' com a recta IV .

Nota: Para bem desenhar a parábola, devem determinar-se, embora sem grande precisão, os pontos de contacto das tangentes dadas, problema de rápida e fácil execução.

II — Desenhar (fig. 30) um triângulo equilátero, IUV , de 6 cms de lado. No lado UV , tomar o ponto A' sendo UA' igual a 5 cms.

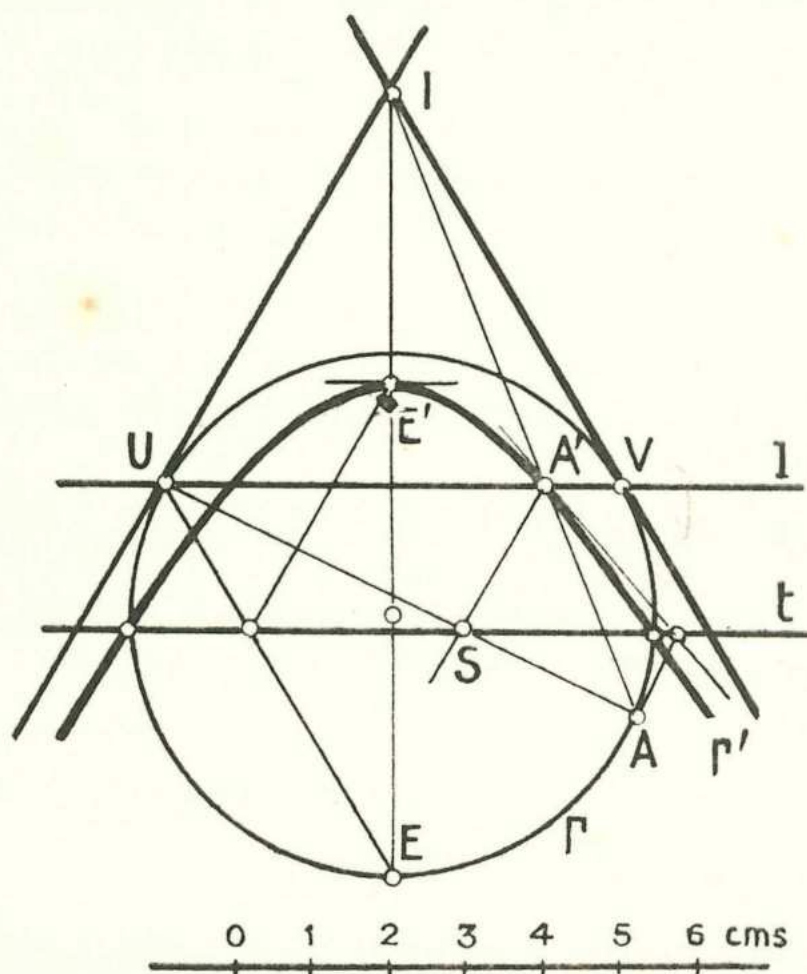


Fig. 30

Construir a hipérbole, Γ' , que passa pelo ponto A' e tem para assíntotas as rectas IU e IV .

Determinar, também, os vértices e a tangente no ponto A' .

Res.: O problema é exemplo e serve para ilustrar o problema de construir uma cónica dada por três pontos e as tangentes em dois destes pontos.

Convém tomar para centro da homologia, a determinar, o ponto de cruzamento das duas tangentes dadas (exclue-se, manifestamente, o caso deste ponto ser do infinito, que precisa de tratamento

especial). No caso presente, portanto, convém tomar para centro o ponto I de cruzamento das assíntotas. Para circunferência original Γ , pode tomar-se qualquer circunferência tangente às tangentes dadas. No caso presente, portanto, qualquer circunferência, Γ , tangente às assíntotas, IU e IV .

Na figura 30, desenhou-se a circunferência, Γ , tangente às assíntotas, IU e IV , nos pontos U e V ; e é esta a circunferência Γ , tomada para original da hipérbole Γ' . A recta que une os pontos de contacto de Γ com as tangentes dadas é a recta original da recta que une os pontos de contacto das mesmas tangentes com a cónica. No caso presente, por consequência, UV é a recta limite, l , da homologia que procuramos.

Tracemos a recta IA' . Esta recta intersecta a circunferência Γ em dois pontos. Um destes pontos deve ser, necessariamente, tomado para original do ponto A' . Na figura está designado por A o ponto tomado para original de A' .

A homologia está, agora, determinada, pelo centro, I , pela recta limite, l , e pelo par de pontos correspondentes, A e A' . Para determinar o eixo da homologia, t , basta procurar, por exemplo, a imagem da recta UA .

A imagem passa por A' e é paralela a IU . O ponto, S , de intersecção de UA com a sua imagem é um ponto do eixo, t , da homologia.

A tangente à hipérbole, Γ' , em A' obtém-se construindo a imagem da tangente à circunferência, Γ , no ponto A .

Os vértices são as imagens dos pontos de intersecção com Γ da bissectriz do ângulo UIV . Na figura, apenas consideramos um destes pontos, que foi designado por E . A imagem E' obteve-se procurando a imagem da recta UE .

III — *Desenhar (fig. 31) um triângulo $IR' T'$ com as seguintes medidas: $R' \hat{I} T' = 60^\circ$; $IR' = 2 \text{ cms}$; $IT' = 9 \text{ cms}$.*

Construir a hipérbole, Γ' , que tem para assíntotas as rectas, IR' e IT' , e é tangente à recta $R' T'$.

Determinar, também, os vértices e o ponto de contacto da tangente $R' T'$.

Res.: Este problema é caso particular e serve para ilustrar o problema de construir uma cónica dada por três tangentes e os pontos de contacto de duas destas tangentes.

Como no problema anterior, convém tomar o ponto I para centro da homologia que queremos determinar. Para circunferência original, Γ , pode tomar-se qualquer circunferência tangente às assín-

totas, IR' e IT' . Tomada a circunferência Γ e designando por U e V os pontos de contacto com as assíntotas, IR' e IT' , a recta UV é a recta limite, l , da homologia que procuramos.

A homologia fica, agora, determinada pela condição de $R'T'$ ser imagem duma tangente à circunferência Γ . Procuremos o ponto limite S das rectas que possam ter para imagem a recta $R'T'$. O ponto S é o ponto de intersecção com a recta limite l , da paralela

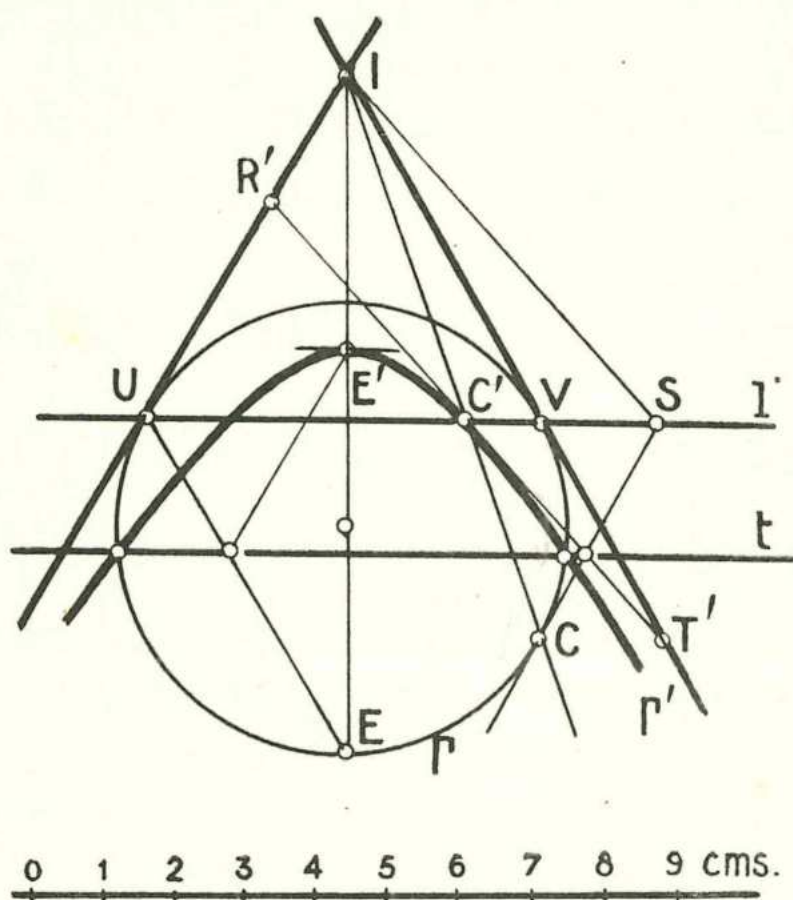


Fig. 31

IS , a $R'T'$, tirada pelo centro de homologia I . Por S , podem tirar-se duas tangentes a Γ . Construída uma destas tangentes, SC , e determinando o ponto de intersecção desta tangente com a recta $R'T'$, obtemos um ponto do eixo, t , da homologia procurada.

Sendo C o ponto de contacto da tangente, SC , o ponto de contacto, C' , pedido, da tangente dada, $R'T'$, é o ponto de intersecção desta tangente com a recta IC .

Os vértices determinam-se como no exercício anterior.

IV — *Desenhar (fig. 32) um triângulo, $V'SA'$, rectângulo em S e isósceles, cujos catetos meçam 5 cms.*

Construir a parábola, Γ' , que tem para eixo a recta $V'S$; para vértice, o ponto V' ; e que passa pelo ponto A' .

Construir, também, a tangente à parábola, Γ' , no ponto A' ; uma tangente que faça 45° com o eixo da parábola e o ponto de contacto, T' , desta tangente.

Res.: Designemos por E'_∞ o ponto do infinito do eixo, $V'S$. Da parábola, Γ' , conhecem-se três pontos — os pontos V' , A' e E'_∞ . Conhecem-se, também, as tangentes nos pontos V' e E'_∞ — respectivamente, a perpendicular em V' à recta $V'S$ e a recta do infinito.

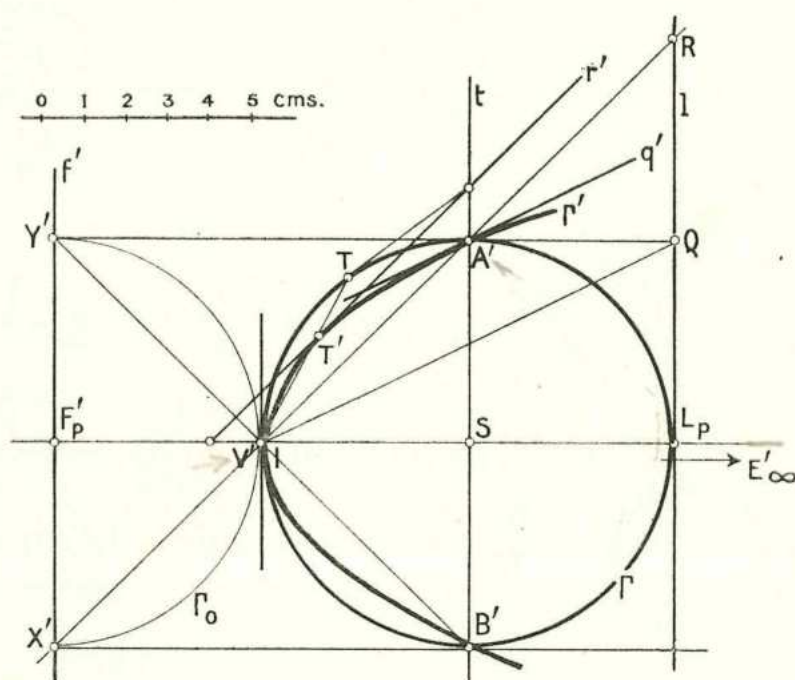


Fig. 32

A parábola está, portanto, determinada por três pontos e as tangentes em dois destes pontos. Não podemos, porém, empregar o método que empregámos na resolução do exercício I, porque, no caso presente, o ponto de intersecção das tangentes é um ponto do infinito.

Construamos o simétrico, B' , do ponto A' , relativamente ao eixo $V'S$. O ponto B' é, também, ponto da parábola, Γ' . Estamos, agora, perante o problema de construir uma cónica determinada por quatro pontos — os pontos V' , A' , B' e E'_∞ — e a tangente num destes pontos — a tangente no ponto V' . Este problema pode considerar-se como caso particular — limite — do problema de construir uma cónica determinada por cinco pontos. Temos de construir um quadrilátero que tenha para vértices os pontos V' , A' , B' e F'_∞ e que seja tal, que, na vizinhança de V' , a tangente em V' fique em regiões trian-

gulares determinadas pelo quadrilátero. Tal quadrilátero é o quadrilátero $V' A' E'_{\infty} B'$.

Consideremos, então, o quadrilátero, $V' A' E'_{\infty} B'$. Determine-mos os pontos X' e Y' , de intersecção, respectivamente, dos dois pares de lados opostos, $V' A'$ e $B' E'_{\infty}$, $V' B'$ e $A' E'_{\infty}$. A recta de fuga, f' , da homologia, que se pretende determinar, é a recta $X' Y'$. O centro da homologia deve ficar na circunferência, Γ_0 , de diâmetro $X' Y'$. Por outro lado, visto que o ângulo recto que a tangente em V' forma com o eixo, $V' S$, deve ser imagem dum ângulo recto, o centro, I , da homologia, deve ficar, também, no diâmetro da circunferência Γ_0 , perpendicular a $X' Y'$.

Para eixo, t , da homologia pode ser tomada qualquer recta paralela a f' (distinta de f' e que não passe por V'). Tomámos a recta t que une os pontos A' e B' .

Nestas condições, a circunferência, Γ , é a circunferência de centro em S e diâmetro $A' B'$. A recta limite l , original duma tangente da parábola, é tangente à circunferência, Γ , e fica determinada por esta condição.

A tangente pedida, em A' , é a imagem da tangente neste mesmo ponto à circunferência Γ . Determinando o ponto limite, Q , desta tangente a Γ , obtém-se a tangente à parábola, tirando por A' a paralela à recta $I Q$.

Para construir uma tangente que faça 45° com o eixo da parábola, comecemos por determinar o ponto limite, R , de rectas cujas imagens façam 45° com o eixo. O ponto R é tal, que o ângulo $R \hat{I} S$ mede 45° . Determinado o ponto R , resta tirar por R a tangente RT a Γ . A imagem desta tangente é a tangente pedida. O ponto de contacto T' é a imagem do ponto de contacto da tangente RT a Γ .

V — Dada (figs. 33 e 34) uma circunferência Γ e três pontos A , B e C , construir um triângulo XYZ inscrito em Γ e cujos lados YZ , ZX e XY passem pelos pontos A , B e C , respectivamente.

Res.: O problema não é sempre possível, mas, em geral, admite duas soluções.

Para o método que vamos seguir, convém distinguir três casos: *a)* um dos pontos, pelo menos, é interior à circunferência Γ ; *b)* todos os pontos são exteriores a Γ , mas, pelo menos, uma das rectas, BC , CA ou AB , não intersecta Γ ; *c)* todos os pontos são exteriores e todas as três rectas, BC , CA e AB , são secantes de Γ .

Quando um dos pontos cair no centro da circunferência Γ ou dois dos pontos forem do infinito, o problema é de fácil resolução.

Os casos *a)* e *b)*, os únicos de que nos vamos ocupar, podem

O ponto A deve ser *contracentro* e esta condição implica a determinação da recta limite l . Esta deve ser o eixo da homologia involutiva de centro em A que transforma Γ em si mesma. Está, assim, determinada a recta limite, l .

Para que Γ seja transformada em circunferência, deve Γ intersectar, ortogonalmente, a circunferência de diâmetro IJ . Esta

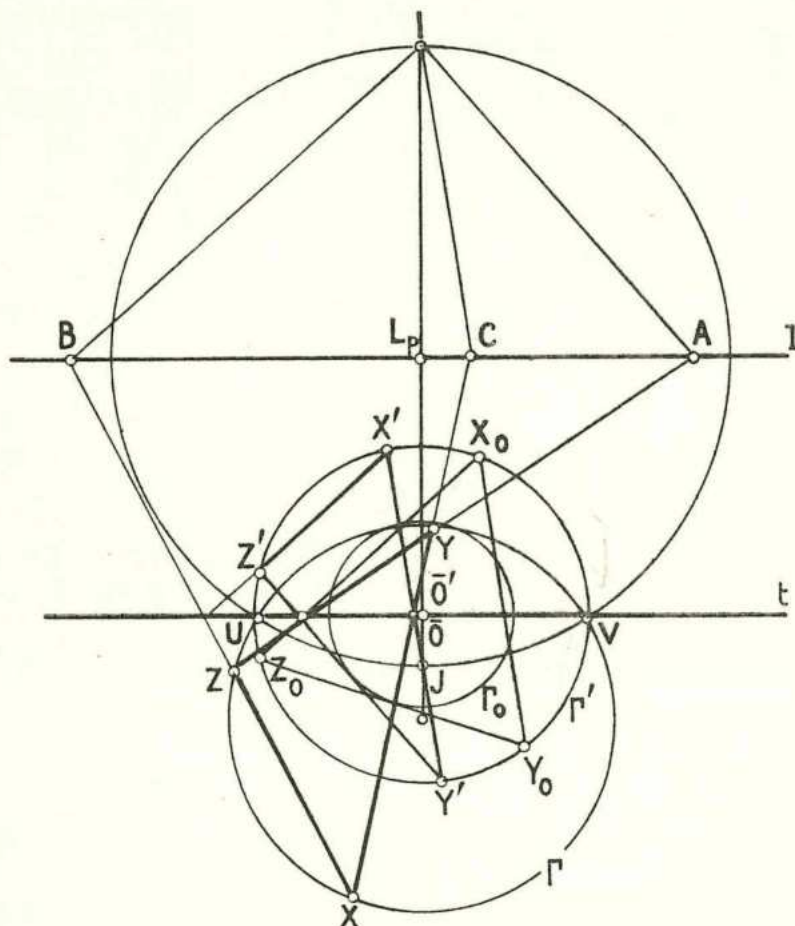


Fig. 34

condição determina os pontos I e J , visto que só existe uma circunferência de centro na recta l e que intersecte, ortogonalmente, a circunferência Γ .

O eixo da homologia pode ser fixado arbitrariamente (qualquer recta paralela a l e distinta desta recta).

Tomámos para eixo a recta t , paralela a l , tirada por A . Nestas condições, a imagem de A' coincide com A e a imagem Γ' de Γ é a circunferência de centro em A e que passa pelos pontos de intersecção, U e V , de t com Γ .

Determinemos a imagem s' da recta s , a que pertencem os

pontos A, B e C . Sendo S o ponto de intersecção de s com l , a imagem s' passa por A e é paralela à recta, Sl . Determinemos, em seguida, as imagens, B' e C' , dos pontos B e C .

Estamos reduzidos a construir um triângulo $X'Y'Z'$ inscrito na circunferência Γ' e cujos lados $Y'Z', Z'X'$ e $X'Y'$ passem, respectivamente, pelo ponto A (centro de Γ'), por B' e por C' .

Este problema é de fácil resolução. Visto que o ângulo $Y'X'Z'$ é recto, o ponto X' pertence à circunferência de diâmetro $B'C'$. O problema tem duas soluções; mas na figura apenas se apresenta uma.

Resta procurar o triângulo XYZ original do triângulo $X'Y'Z'$.

b) Uma das rectas determinadas pelos pontos, A, B e C não intersecta Γ (fig. 34).

Como na figura anterior, os três pontos A, B e C , também, estão em linha recta; mas esta circunstância nenhuma influência tem sobre as considerações que vão ser feitas.

A recta AC (que contém, também, B) não intersecta a circunferência Γ ; designemos por l esta recta. Podemos determinar uma homologia, com a recta l para recta limite, que transforma a circunferência Γ numa circunferência Γ' . Esta homologia transforma os pontos A e C , e, no caso presente, também, o ponto B , em pontos do infinito.

Os pontos isogonais, I e J , obtêm-se, traçando a circunferência que corta, ortogonalmente, a circunferência Γ e tem para centro um ponto da recta limite, l .

Para simplificar a construção, tomemos para eixo da homologia a recta, t , que une os pontos de intersecção, U e V , de Γ com a circunferência que determina os pontos isogonais. A imagem Γ' da circunferência Γ é a circunferência de diâmetro UV .

Estamos reduzidos a resolver o problema de inscrever na circunferência Γ' um triângulo $X'Y'Z'$ cujos lados $Y'Z', Z'X'$ e $X'Y'$ sejam paralelos, respectivamente, às rectas IA, IB e IC .

Este problema é de fácil resolução. Tomemos qualquer ponto X_0 de Γ' e por este ponto tivemos $X_0Y_0 \parallel IC$ e $X_0Z_0 \parallel IB$, sendo Y_0 e Z_0 pontos de Γ' . Se a corda Y_0Z_0 de Γ' fosse paralela a IA , teríamos o problema resolvido. Não sendo, resta deslocar por meio de rotação em torno do centro de Γ' a corda Y_0Z_0 até a levar a uma posição $Y'Z'$, em que seja paralela a IA . Tirando depois, $Y'X' \parallel IC$ e $Z'X' \parallel IB$, temos construído o triângulo $X'Y'Z'$.

Basta, agora, construir o triângulo XYZ , original do triângulo $X'Y'Z'$, para termos o problema resolvido.

O problema tem duas soluções ; apenas, porém, se apresenta uma na figura.

VI— *Desenhar (fig. 35) uma circunferência com o raio de um centímetro.*

Designar por O o centro e por A , um ponto da circunferência. Traçar a recta AO e nesta recta marcar o ponto L , de forma

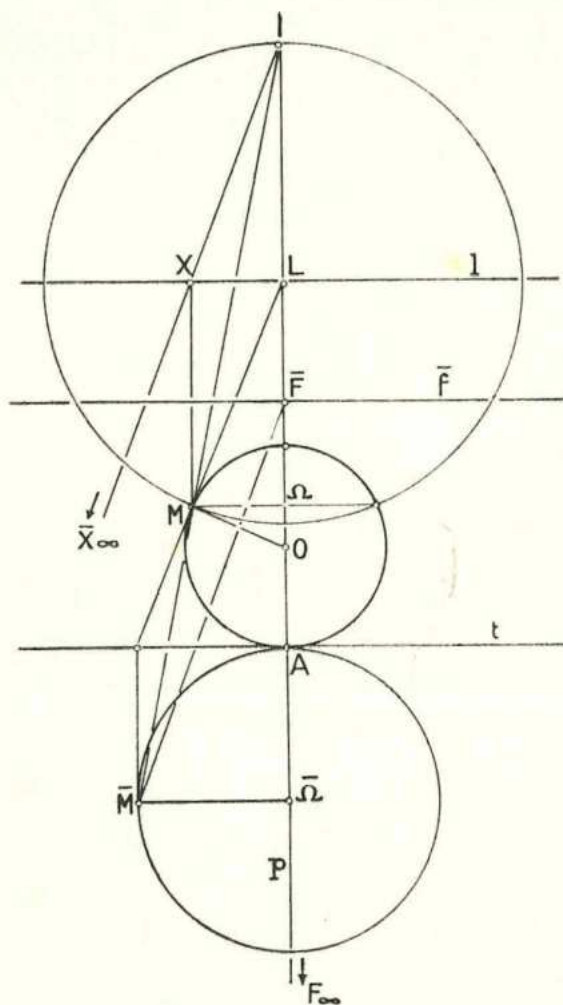


Fig. 35

que seja LA igual a 3,5 cms e fique o centro O interior ao segmento LA . Tirar em L a perpendicular, l , a OA .

a) *Determinar o centro, I , o eixo, t , a recta de fuga, $\bar{f}$, duma homologia que tenha a recta, l , para recta limite e transforme a circunferência desenhada numa circunferência que lhe seja tangente;*

b) *Construir a circunferência homóloga.*

Res. : A recta OA é a recta principal da homologia procurada e, portanto, L , o ponto de fuga principal. A circunferência que tem para diâmetro o segmento que une os pontos isogonais tem para

centro o ponto L e deve intersectar, ortogonalmente, a circunferência desenhada. Podemos, portanto, desenharmos tal circunferência e, assim, fica determinado o centro I da homologia (o problema admite duas soluções).

O eixo t da homologia tem de ser uma recta paralela a l . Por outro lado, para que a circunferência dada resulte tangente à homo-

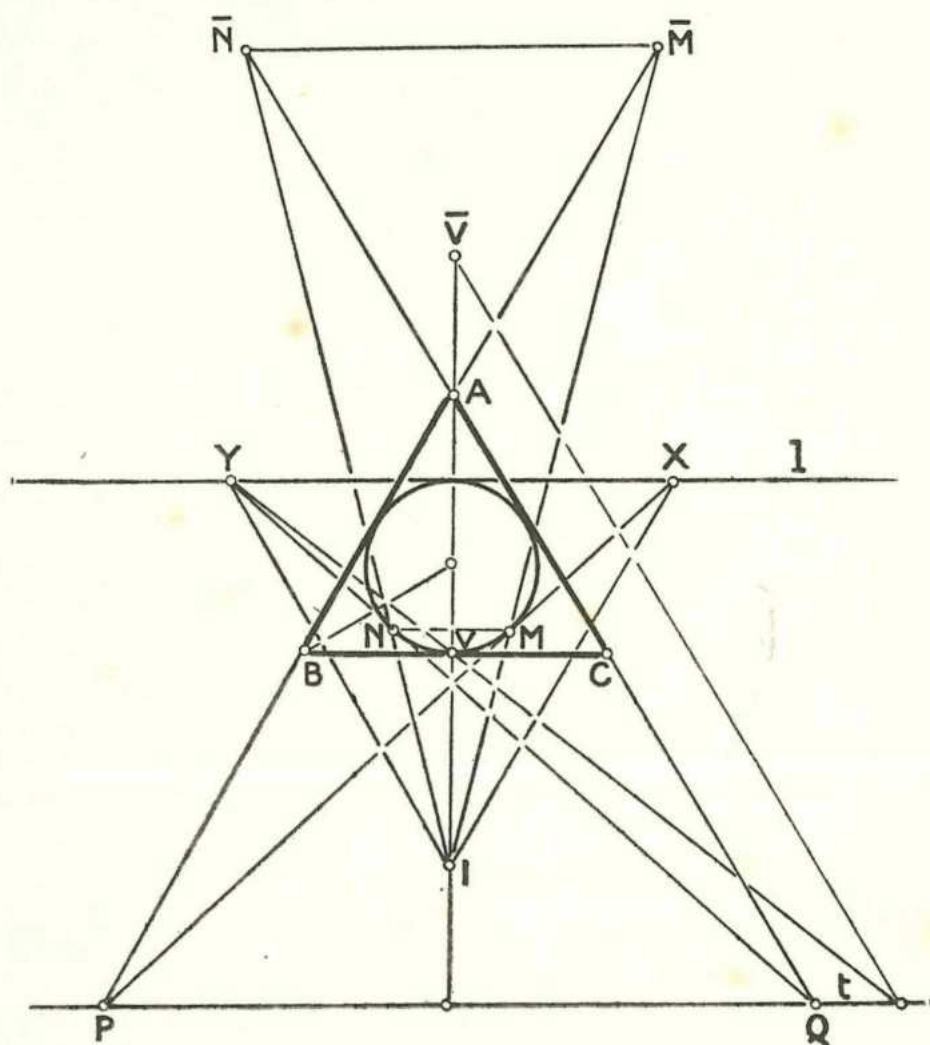


Fig. 36

logia no ponto A , t tem de passar por A . Assim se determina o eixo, t , da homologia.

Para determinar a recta de fuga, $\bar{f}$, procurou-se, na figura, a imagem $\bar{F}$ do ponto do infinito, F_∞ , da recta OA . Considerou-se $MX \parallel OA$. Visto que X é ponto limite e $\bar{M}$ é a imagem de M , a imagem de MX é a paralela a IX tirada por $\bar{M}$.

Para determinar a circunferência homóloga, tomou-se um ponto M na circunferência dada e procurou-se a imagem $\bar{M}$ de M .

VII—Desenhar (fig. 36) um triângulo de 3 cms de lado.

Desenhar, depois, a circunferência inscrita. Traçar, ainda a paralela, t , a BC que diste de BC 6 cms e que fique do lado de BC em que não fica o triângulo.

Determinar uma homologia que satisfaça às seguintes condições:

a) Deve ter para eixo a recta t ; b) deve transformar a circunferência inscrita no triângulo ABC numa parábola que seja tangente às rectas AB e AC ; c) não deve, porém, ter para centro o ponto A nem deve ter para recta limite a recta BC .

Determinar, também, o vértice da parábola.

Res.: Devendo a circunferência inscrita no triângulo ABC ser transformada em parábola, deve a recta limite, l , ser-lhe tangente.

Não podendo ser a tangente BC , por virtude das condições impostas, tem de ser a outra tangente com a direcção de BC .

As rectas originais das tangentes, AB e AC , à parábola devem ser tangentes à circunferência considerada. Não devendo ser, pelas condições impostas, o ponto A centro da homologia não podem, também, as originais de AB e de AC coincidirem com estas mesmas rectas. Só existe uma possibilidade. Sejam P e Q os pontos de intersecção com t das tangentes AB e AC , respectivamente.

As originais de AB e AC têm de ser as segundas tangentes, PX e QY à circunferência considerada, tiradas pelos pontos P e Q , respectivamente. Sendo X e Y os pontos limites destas tangentes, PX e QY , o centro I da homologia obtém-se tirando por X e Y às imagens (conhecidas) AB e AC , respectivamente.

O vértice, $\bar{V}$, obtém-se, manifestamente, procurando a imagem do ponto de contacto, V da tangente BC à circunferência considerada.

Exercícios

81. Fixar uma recta p e nesta recta dois pontos, W e L_p , sendo WL_p igual a 14 cms.

Fixar, depois, no segmento WL_p o ponto I , sendo WI igual a 9 cms.

Traçar as perpendiculares, l e t a p , nos pontos L_p e W respectivamente.

Desenhar um triângulo equilátero ABC de lado igual a 5 cms, nas seguintes condições:

a) O vértice A é um ponto do segmento WI , sendo WA igual a 6 cms;

b) O vértice B deve ser o vértice que mais próximo fica do ponto W e o lado AB deve formar 45° com a recta p .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro, eixo e recta limite, respectivamente, o ponto I , a recta t e a recta l .

82. Fixar uma recta p e nesta recta dois pontos W e F'_p , sendo WF'_p igual a 14 cms. Fixar, depois, no segmento WF'_p o ponto I , sendo WI igual a 9 cms. Traçar as perpendiculares, t e f' , a p respectivamente, nos pontos, W e F'_p .

Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 7 cms de lado, nas seguintes condições:

a) O vértice A é um ponto do segmento WI , sendo WA igual a 6 cms;

b) O vértice B deve ser o vértice que mais próximo fica do ponto W e o lado AB deve formar 45° com a recta p .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro, eixo e recta de fuga, respectivamente, o ponto I , a recta t e a recta f' .

83. Fixar uma recta p e nesta recta dois pontos W e I , sendo WI igual a 14 cms. Fixar, depois, no segmento WI o ponto L_p , sendo WL_p igual a 10 cms. Traçar as perpendiculares, t e l , a p , respectivamente, nos pontos W e L_p .

Desenhar um triângulo equilátero ABC , de 4 cms de lado, nas condições seguintes:

a) O vértice A é um ponto do segmento WI , sendo WA igual a 4 cms;

b) O vértice B deve ser o vértice que mais próximo fica do ponto W e o lado AB deve formar 45° com a recta p .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro o ponto I ; para eixo, a recta t ; para recta limite, a recta l .

84. Fixar uma recta p e nesta recta dois pontos, W e I , sendo WI igual a 14 cms. Fixar, depois, no segmento WI o ponto F'_p , sendo WF'_p igual a 4 cms. Traçar as perpendiculares, t e f' a p , respectivamente, nos pontos W e F'_p .

Desenhar um triângulo equilátero ABC , de 4 cms de lado, nas condições seguintes:

a) O vértice A sobrepõe-se ao ponto F'_p ;

b) O vértice B deve ser o vértice que mais próximo fica do ponto W e o lado AB deve formar 45° com a recta p .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro o ponto I ; para eixo, a recta t ; para recta de fuga, a recta f' .

85. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes medidas:

Base maior, igual a 8 cms; altura, igual a 9 cms; base menor, igual a 3 cms.

Designar por t e l , respectivamente, as rectas a que pertencem as bases, maior e menor; por I , o ponto de intersecção dos lados não paralelos; por A , o ponto médio da base maior; por B e C , os pontos médios dos lados não paralelos. Desenhar e acentuar o triângulo ABC .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro o ponto I ; para eixo, a recta t ; para recta limite, a recta l .

86. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes medidas:

Base maior, igual a 8 cms; altura, igual a 4,5 cms; base menor, igual a 5,5 cms.

Designar por B e C os vértices que ficam na base menor; por t e f as rectas a que pertencem as bases, respectivamente, maior e menor; por I , o ponto de intersecção dos lados não paralelos; por A , o ponto médio da base maior. Desenhar o triângulo ABC .

Construir a imagem do triângulo ABC na homologia que tem para centro o ponto I ; para eixo, a recta t ; para recta de fuga, a recta f' .

87. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 5 cms de lado.

Construir a perpendicular t em A ao lado AB e a perpendicular p em B ao lado BC . Traçar, também, a paralela q ao lado AB , tirada por C . Designar por I o ponto de intersecção de p com q .

Construir uma imagem homológica do triângulo ABC , sendo t o eixo da homologia e I , o centro, e medindo 6 cms a imagem $A'B'$ de AB . Determinar, depois, a recta limite e a recta de fuga da homologia.

88. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 4 cms de lado. Tirar no vértice C a perpendicular ao lado BC e designar por D o ponto de intersecção desta perpendicular com o lado AB .

Tirar pelo ponto D a paralela ao lado AC . Designar por l esta paralela; por F , o ponto de intersecção de l com o lado BC do triângulo.

Transformar por homologia, que tenha para recta limite a recta l , o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, cujos lados $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$ meçam 5 cms, 3 cms e 4 cms, respectivamente.

89. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 7 cms de lado. Designar por D e E os pontos médios dos lados AB e AC e, por f' , a recta DE que une estes pontos.

Transformar por homologia, que tenha para recta de fuga a recta f' , o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, cujos lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, meçam 10 cms, 8 cms e 6 cms, respectivamente.

90. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 7 cms de lado. Designar por D e E os pontos médios dos lados AB e BC ; por f' , a recta que une os pontos D e E .

Transformar por homologia, que tenha para recta de fuga a recta f' , o triângulo ABC num triângulo, $A'B'C'$, cujos lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, meçam 10 cms, 8 cms e 4 cms, respectivamente.

91. Desenhar um ângulo φ de 45° . Designar por a e b os lados e por S o vértice. Traçar e designar por c a bissectriz. Sobre o lado a marcar o ponto A , sendo SA igual a 3 cms; sobre b , o ponto B , sendo SB igual a 6 cms; sobre c , o ponto C , sendo SC , igual a 7 cms. Construir o triângulo ABC .

Determinar o centro I , o eixo t , a recta limite l e a recta de fuga f' da homologia que realiza as seguintes condições:

a) Transforme o ângulo φ , de 45° , em ângulo recto, sendo a imagem a' de a paralela a a ;

b) Seja de 2 cms a distância de a' a a ;

c) Transforme a bissectriz c de φ na bissectriz c' da imagem φ' de φ ;

d) Transforme o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$ com o lado $A'B'$ perpendicular a c' .

Construir, também, a imagem do ângulo φ e do triângulo ABC .

92. Desenhar um ângulo φ de 45° . Designar por a e b os lados; por S , o vértice. Traçar e designar por c a bissectriz. Sobre o lado a marcar o ponto A , sendo SA igual a 5 cms; sobre b , o ponto B , sendo SB igual a 7 cms; sobre c , o ponto C , sendo SC igual a 2 cms. Construir o triângulo ABC .

Determinar o centro I , o eixo t , a recta de fuga e limite, $f' \equiv l$, da homologia involutiva que realiza as seguintes condições:

- a) Transforma o ângulo φ , de 45° , num ângulo φ' de 90° ;
- b) A imagem a' de a é paralela à original a e dista desta 2 cms;
- c) A bissectriz c de φ deve transformar-se na bissectriz c' de φ' .

Determinar, também, a imagem do triângulo ABC .

93. Desenhar um triângulo ABC , rectângulo em A e isósceles, medindo os catetos 5 cms. Traçar a mediana que une o vértice C ao ponto médio do cateto AB , prolongá-la e no prolongamento tomar o ponto I , sendo CI igual a 14 cms.

Determinar o eixo t , a recta limite e de fuga, $l \equiv f'$, da homologia involutiva que realiza as seguintes condições:

a) Tem para centro o ponto I e para recta principal a mediana traçada;

b) Transforma o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, rectângulo em C' .

Determinar, também, a imagem $A'B'C'$ do triângulo ABC .

94. Desenhar uma circunferência de 3 cms de raio. Traçar uma tangente t à circunferência desenhada.

Determinar o centro I , a recta limite e de fuga, $l \equiv f'$, duma homologia involutiva que tenha para eixo a tangente t e transforme a circunferência desenhada numa hipérbole equilátera.

Determinar, também, uma tangente à hipérbole, a qual faça 60° com o eixo desta cónica e um diâmetro que faça 30° com o mesmo eixo.

95. Desenhar um quadrado, $ABCD$, de 5 cms de lado. Transformar o quadrado num trapézio, $A'B'C'D'$, de forma que sejam realizadas as seguintes condições;

- a) O trapézio seja isósceles;
- b) A base maior, $A'B'$, meça 6 cms; a base menor, $C'D'$, seja metade da base maior;
- c) Os lados oblíquos, $A'C'$ e $A'D'$, sejam iguais à base menor.

96. Desenhar um triângulo equilátero ABC de 5 cms de lado. Traçar $BH \parallel AC$ e $CH \parallel AB$, designando por H o ponto de cruzamento das paralelas traçadas. Traçar a recta HA .

Determinar o centro I , o eixo t , a recta limite l e a recta de fuga f' duma homologia que realize as seguintes condições:

a) Transforme o triângulo ABC em triângulo $A'B'C'$, rectângulo em A' e isósceles, de catetos, $A'B'$ e $A'C'$, medindo 5 cms;

b) Transforme, também, as três rectas, HA , HB e HC , em medianas do triângulo $A'B'C'$.

97. Fixar uma recta l e nesta recta dois pontos U e V , sendo UV igual a 11 cms. Tomar no segmento UV o ponto O , sendo UO igual a 6 cms. Tirar pelo ponto O as três rectas, a , b e c , sendo: ângulo de a com l 60° ; b , perpendicular a a ; c , perpendicular a l . Marcar em a o ponto X , sendo OX igual a 4 cms; em b , o ponto Y , sendo OY igual a 3 cms; os pontos X e Y devem ficar para o mesmo lado de l . Traçar a recta XY .

Construir um triângulo ABC inscrito nas rectas a , b e c (A , ponto de a ; B , ponto de b ; C , ponto de c) tal que o lado AB seja paralelo a XY , o lado AC passe por U e o lado BC passe por V .

Nota: Por uma homologia, que tenha para recta limite a recta l , leva-se o problema posto ao problema de fácil resolução, de inscrever em três rectas concorrentes (no caso presente paralelas) um triângulo com dois lados paralelos a rectas dadas e passando o terceiro por um ponto dado.

98. Desenhar um triângulo ABC , sendo: AB igual a 10 cms; AC igual a 8 cms. BC igual a 7 cms. Pelo vértice C , tirar a paralela à mediana que passa pelo vértice A e designar a paralela traçada por l . Em l , tomar os dois pontos U e V ; sendo C ponto interior do segmento UV ; CU igual 2 cms e CV igual a 5,5 cms.

Construir um triângulo XYZ que realize as seguintes condições.

a) O triângulo XYZ seja inscrito no triângulo ABC ; ficando X no lado BC ; Y , no lado AC ; Z , no lado AB ;

b) O lado XY seja paralelo a l ; o lado YZ passe por V ; o lado ZX passe por U .

Nota: Por uma homologia que tenha a recta l para recta limite, reduz-se o problema ao problema de inscrever num triângulo um triângulo que tenha os três lados paralelos a rectas fixadas.

99. Desenhar um triângulo XYZ , rectângulo em Y , medindo os catetos XY e YZ , respectivamente, 4 cms e 3 cms. Marcar e designar por V o ponto médio do cateto XY .

Determinar o centro e as assíptotas da hipérbole assim definida:

a) Tem para eixo a recta XY ;

b) Contém os pontos V e Z ;

c) Tem uma assíptota paralela à recta XZ .

Desenhar, também, a hipérbole.

100. Traçar duas rectas, a e s , perpendiculares. Designar por I o ponto de intersecção das rectas traçadas. Em a , fixar o ponto X , sendo IX igual a 3 cms; em s , o ponto S , sendo IS igual a 5 cms, e, depois, no segmento IS , o ponto Y , sendo IY igual a 3 cms. Traçar a recta XY .

Considerar a hipérbole assim definida:

- a) Tem a recta a para assíptota;
- b) É tangente à recta s , sendo S o ponto de contacto;
- c) É tangente, também, à recta XY .

Determinar o centro e a 2.^a assíptota da hipérbole.

Desenhar, também, a curva.

CAPÍTULO II

PROjecção ORTOGONAL

INTRODUÇÃO:

Neste capítulo são revistos princípios e apresentadas questões de projecção ortogonal.

Merece ser devidamente apreciado e posto em relevo o valor da projecção ortogonal.

Sobre as outras formas de projecção, a projecção ortogonal oferece vantagens especiais. Cremos ser indiscutível que deve ser a forma de projecção preferida para a representação de figuras espaciais. Deve ser a forma de projecção exclusivamente usada nos desenhos de carácter científico e, de modo muito especial, nos desenhos destinados a ilustrar livros que apresentem figuras de carácter geométrico.

A projecção ortogonal, convenientemente feita, dá representações expressivas, tanto de forma como de dimensões, das figuras que se representam. O desenho por projecção ortogonal é o que menos possibilidade oferece de falsas interpretações; tem, por isso, *carácter e realismo*.

É condenável o pouco cuidado que tem havido na execução dos desenhos com que se apresentam ilustrados muitos, senão a grande maioria, dos livros de ensino, mesmo, o que mais reparo oferece, de livros próprios de geometria; desenhos feitos por simples sentimento, sem princípios científicos, sem respeito pelas proporções que se mostram nas figuras que desejam representar.

Temos, portanto, como muito importantes as ideias e princípios revistos no presente capítulo, ideias e princípios que serão retomados e desenvolvidos no capítulo seguinte, onde se trata de *axonometria ortogonal*, que, como o título indica, é assunto, ainda, de projecção ortogonal.

Projecção e homologia afim, ortogonais. Perpendicularidade:

Existe uma relação íntima entre *projecção ortogonal* e *homologia afim ortogonal*.

Se uma figura F' se obtiver por projecção ortogonal duma figura *plana* F , também F' se obtém da figura F por homologia afim ortogonal e, reciprocamente, se uma figura F' resultar duma figura F por homologia afim ortogonal, também se pode determinar uma figura igual ou, pelo menos, semelhante a F que dê por projecção ortogonal uma figura igual a F' .

Da relação por projecção ortogonal, passa-se à relação por homologia afim ortogonal, por meio de *rebatimento* do plano duma das figuras sobre o plano da outra. Da relação por homologia afim ortogonal, passa-se à relação por projecção ortogonal, por *levantamento*, convenientemente feito, do plano duma das figuras.

Da relação entre projecção ortogonal e homologia afim ortogonal, resulta um princípio fundamental sobre a conservação de perpendicularidade em projecção ortogonal.

Em qualquer homologia afim (portanto, também, em qualquer projecção paralela, ortogonal ou não ortogonal) há duas direcções perpendiculares que têm para imagens direcções igualmente perpendiculares. Em homologia afim *ortogonal*, porém, é este o resultado que deve ser acentuado, as duas direcções são a do eixo da homologia e a das perpendiculares a este mesmo eixo. Por consequência, em projecção ortogonal, as direcções perpendiculares, que se mantêm perpendiculares, são as direcções paralelas ao plano de projecção e as direcções a estas perpendiculares.

Podemos, por consequência, enunciar os seguintes princípios:

a) *Rectas perpendiculares projectam-se em rectas perpendiculares, se uma das rectas for paralela ao plano de projecção.*

(Exclui-se, manifestamente, o caso de as rectas estarem num plano perpendicular ao plano de projecção).

b) *Rectas perpendiculares sòmente se projectam em rectas perpendiculares, se, pelo menos, uma das rectas for paralela ao plano de projecção;*

c) *Se duas rectas perpendiculares se projectam em rectas perpendiculares, então, pelo menos, uma das rectas é paralela ao plano de projecção.*

Para simplificar a exposição, diremos de *nível* as rectas dum plano que são paralelas ao plano de projecção, empregando, assim, a expressão *recta de nível* no sentido de recta paralela ao plano de projecção. Diremos de *maior declive* as rectas do plano perpendiculares às rectas de nível.

Recta perpendicular a um plano — Uma recta que seja perpendicular a um plano, sendo perpendicular a todas as rectas do plano,

é perpendicular, portanto, às rectas de nível do plano, isto é, às rectas do plano paralelas ao plano de projecção. Desta maneira :

d) *Uma recta perpendicular a um plano projecta-se numa recta que é, necessariamente, perpendicular às projecções das rectas de nível do plano.*

Uma circunferência que pertença ao plano projecta-se numa elipse cujo eixo maior é a projecção do diâmetro paralelo ao plano de projecção. A projecção duma perpendicular ao plano é, portanto, paralela ao eixo menor da elipse. Duas rectas perpendiculares do plano projectam-se em rectas que são paralelas a diâmetros conjugados.

Ora, é manifesto, que numa elipse, sempre o eixo menor fica contido na *região angular obtusa* determinada por dois quaisquer diâmetros conjugados. Podemos, por consequência, enunciar, ainda, o seguinte princípio :

e) *Seja p uma recta perpendicular a um plano α ; a e b , duas rectas perpendiculares do plano α . Se as projecções de a e b não forem perpendiculares, a projecção de p fica, necessariamente, contida na região angular obtusa (não na região angular aguda) determinada pelas projecções de a e b .*

Redução de dimensões :

A projecção ortogonal possui uma propriedade própria que deve ser posta em relevo e que nenhuma outra forma de projecção apresenta.

A projecção ortogonal nunca se realiza com ampliação. Reduz, normalmente, as dimensões. Assim, a área duma figura plana é reduzida, a não ser, excepcionalmente, no caso de o plano da figura ser paralelo ao plano de projecção, sendo neste caso a área da projecção igual à área da figura projectada. O comprimento dum segmento é reduzido, a não ser que o segmento exista numa recta paralela ao plano de projecção, sendo neste caso, como no caso da área, a projecção igual, em comprimento, ao segmento projectado.

A redução faz-se na razão, $1 : \cos \alpha$, sendo α o ângulo do plano ou da recta com o plano de projecção.

Forma, homologia afim e projecção :

a) Uma homologia afim ou não afim transforma figuras homotéticas em figuras homotéticas. Por outras palavras :

O estar em relação de homotetia mantém-se em homologia.

Por consequência: Em qualquer homologia, duas circunferências são transformadas em cónicas homotéticas. Particularmente, em homo-

logia afim, duas quaisquer circunferências são transformadas em duas elipses homotéticas.

É de observação imediata que se duas elipses forem homotéticas são verificadas as duas condições seguintes :

I — Os eixos maiores das elipses são paralelos e, consequentemente, também, os eixos menores.

II — A razão do eixo maior para o menor é a mesma nas duas elipses.

Reciprocamente, se estas condições forem verificadas, as elipses são homotéticas.

Elipses, nas quais a razão do eixo maior para o menor seja a mesma, podem levar-se a ser homotéticas, são, portanto semelhantes.

b) Uma homotetia transforma homologia afim em homologia afim e homologia não afim em homologia não afim — *O estar em homologia é relação que se mantém em homotetia.*

Dizemos *semelhantes* duas homologias que se possam levar a ser transformadas uma na outra por homotetia. No caso de homologia afim, *semelhança* significa tanto como *igualdade*, isto é homologias afins semelhantes são tais que se podem sobrepor.

c) Visto que em três rectas paralelas sempre podemos *inscrever* triângulos semelhantes a um triângulo antecipada e arbitrariamente fixado, sempre, fixada a direcção duma homologia afim, poderemos determinar o seu eixo de forma que um triângulo dado ABC seja transformado num triângulo $A'B'C'$ semelhante a um triângulo XYZ antecipadamente fixado.

Em homologia afim, pela condição de um triângulo ter para imagem um triângulo de forma antecipadamente fixada, fica inteiramente determinada a forma da imagem F' de qualquer figura original F considerada. Podemos, de facto, construir uma figura $\bar{F}$ semelhante a F' de maneira fácil, pelo método que passamos a indicar:

Sejam (fig. 37) A , B e C os três pontos aos quais é imposto que o triângulo ABC , por eles determinado, tenha para imagem um triângulo $A'B'C'$ semelhante a um triângulo XYZ dado antecipadamente.

Seja G qualquer ponto da figura original F considerada; g , qualquer recta da mesma figura.

Construamos um triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ da forma considerada, isto é, semelhante ao triângulo XYZ , de modo que um dos lados seja igual ao correspondente do triângulo ABC . Construamos, por exemplo, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, semelhante a XYZ , com $\bar{B}\bar{C} = BC$. Por virtude

desta relação, daremos à recta BC o nome de *base da construção*.

A construção da figura F pode ser determinada pelos seguintes princípios:

I — Segmentos sobre a base ou sobre rectas paralelas à base não sofrem ampliação nem redução, transportam-se simplesmente.

II — Rectas paralelas mantêm-se paralelas.

Basta, manifestamente, mostrar como se podem construir o ponto $\bar{G}$ e a recta $\bar{g}$ correspondentes, respectivamente, do ponto G e da recta g .

Construção de $\bar{G}$. Tiremos por G a recta p , paralela à base

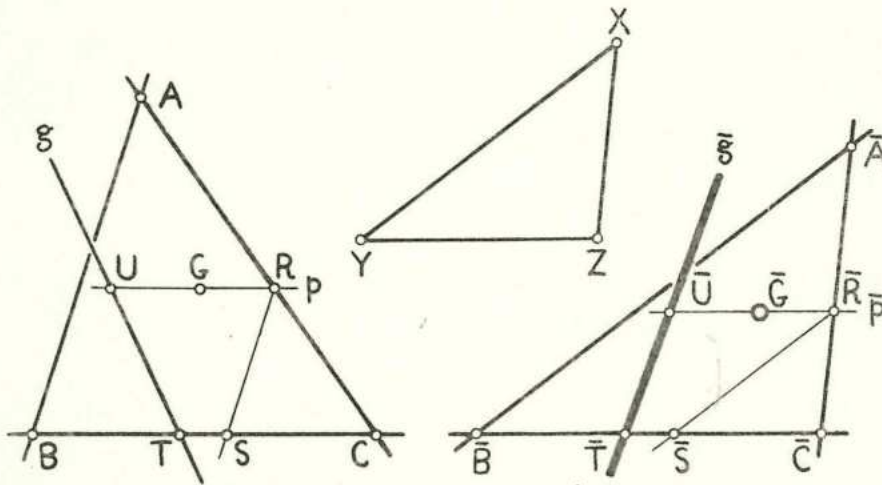


Fig. 37

BC ; determinemos a intersecção R de p com AC ; tiremos $RS \parallel AB$, sendo S o ponto de intersecção com a base BC .

Tomando sobre $\bar{B}\bar{C}$, $\bar{B}\bar{S} = BS$, obtemos o correspondente $\bar{S}$ de S ; tirando $\bar{S}\bar{R} \parallel \bar{A}\bar{B}$ e determinando a intersecção com $\bar{A}\bar{C}$, temos $\bar{R}$ correspondente de R ; tirando $\bar{p} \parallel \bar{B}\bar{C}$, temos a recta correspondente de p ; tomando, finalmente, $\bar{R}\bar{G} = RG$, temos construído o correspondente pedido de G .

Construção de $\bar{g}$. Para construir $\bar{g}$, podemos lançar mão da base e da paralela, já considerada, p .

Determinemos os pontos T e U de intersecção de g com a BC e a recta p , respectivamente. Os correspondentes $\bar{T}$ e $\bar{U}$ constroem-se por simples transporte: $\bar{B}\bar{T} = BT$, $\bar{R}\bar{U} = RU$.

d) Vimos que, fixada a direcção, podemos, sempre, determinar o eixo da homologia de forma que a imagem dum triângulo considerado seja semelhante a um triângulo previamente fixado.

É, também, possível e de fácil solução o problema seguinte, de certo modo, dual:

Fixado o eixo de homologia, determinar a homologia de forma que um triângulo considerado ABC tenha para imagem um triângulo $A'B'C'$ semelhante a um triângulo XYZ , antecipadamente fixado.

e) Se uma figura F for transformada numa figura F' , por homologia afim, e esta mesma homologia transforme uma circunferência Γ numa elipse Γ' , qualquer homologia afim que transforme a elipse Γ' numa circunferência $\bar{\Gamma}$ transforma a figura F' numa figura $\bar{F}$ que, podemos afirmar, é, necessariamente, semelhante à figura F .

C. E.: Sejam AB e CD e $\bar{A}\bar{B}$ e $\bar{C}\bar{D}$ os diâmetros das circunferências Γ e $\bar{\Gamma}$ que correspondem aos eixos da elipse Γ' , respectivamente. Disponhamos as circunferências Γ e $\bar{\Gamma}$ de forma que resultem paralelos os diâmetros AB e $\bar{A}\bar{B}$ e, portanto, também, os diâmetros CD e $\bar{C}\bar{D}$. Então, as duas figuras F e $\bar{F}$ correspondem-se numa e noutra das duas homotetias que transformam a circunferência Γ na circunferência $\bar{\Gamma}$.

f) Se uma figura F' for obtida por homologia afim duma figura F , também F' pode representar, em projecção ortogonal, uma figura $\bar{F}$ semelhante à figura F (isto é, pode ser obtida por projecção ortogonal da figura $\bar{F}$). A figura representada, $\bar{F}$, fica inteiramente determinada pela figura representativa F' .

C. E.: Visto que se afirma ser F' figura homológica afim de F , deve, necessariamente, poder-se encontrar uma homologia afim que transforme F' numa figura F_s semelhante a F . Determinada esta homologia, procurem-se as direcções perpendiculares, δ_n e δ_m , que se mantêm perpendiculares, isto é, cujas imagens δ'_n e δ'_m são igualmente perpendiculares.

Por outro lado, da figura F' deve poder passar-se à figura $\bar{F}$ por homologia ortogonal e por homologia ortogonal que não reduza.

Visto, também, que, em homologia ortogonal, as direcções perpendiculares, que se mantêm perpendiculares, são a direcção do eixo da homologia e a direcção que lhe é perpendicular, a direcção do eixo da homologia ortogonal tem de ser δ'_n ou δ'_m . Qual destas direcções deva ser, tem de ser decidido pela condição que se impõe de a homologia não ser redutiva. Pode proceder-se do seguinte modo:

Tomemos dois segmentos do mesmo comprimento, um com a direcção δ_n , o outro com a direcção δ_m , e procuremos as suas imagens na homologia que transforma F_s em F' . As direcções das imagens obtidas são as direcções δ'_n e δ'_m e elas, as imagens, são, natural-

mente, diferentes em comprimento. Suponhamos que seja δ'_n a direcção do segmento de maior comprimento. Então, o eixo da homologia ortogonal, que se pretende achar, deve ter a direcção δ'_n .

O problema posto pode considerar-se resolvido.

Resta tomar para eixo qualquer recta t com a direcção δ'_n e construir a homologia ortogonal com a recta t para eixo e que transforme o segmento de menor comprimento num segmento igual, em comprimento, ao maior.

Fica, assim, estabelecido que a figura F' representa em projecção ortogonal uma figura $\bar{F}$ semelhante à figura F e que a figura representada $\bar{F}$ fica inteiramente determinada pela figura representativa F' e pela condição de ser semelhante à figura F .

A figura F pode ser construída directamente, a partir de F' , sem termos que fixar a homologia, pelo método que ficou indicado, de construir uma figura, de *forma* imposta e homológica duma figura dada.

Temos como fundamental a questão que acaba de ser tratada.

Vamos, por isso, sintetizar, sistematizar e precisar a teoria desenvolvida.

Problema fundamental — É dada uma figura F' e afirma-se que esta figura representa em projecção ortogonal uma figura plana F que satisfaz a determinadas condições, as quais determinam a sua forma.

Determinar a figura F .

Determinar, também, a sua posição, isto é, o ângulo do plano da figura com o plano de projecção e, de modo geral, o ângulo que faz com o plano de projecção qualquer recta da figura.

O problema pode ser assim tratado:

Sabe-se que:

I — Um ângulo recto, que é representado em projecção ortogonal por um ângulo recto, tem, necessariamente, um lado paralelo ao plano de projecção.

II — Um segmento é igual em comprimento ao segmento que o representa, quando exista numa recta paralela ao plano de projecção.

III — Segmentos que não existam em rectas paralelas ao plano de projecção apresentam-se, necessariamente, reduzidos na representação.

A parte essencial do problema consiste e reduz-se, por consequência, a determinar um ângulo recto que seja representação dum ângulo, igualmente, recto

Para tanto :

1.º) Determinemos uma homologia afim — qualquer — que transforme a figura F' numa figura $\bar{F}$ que satisfaça às condições impostas à figura F .

[Naturalmente, apresentam-se muitas possibilidades de determinar semelhante homologia e existirá uma, se não imediato, pelo menos, de fácil tratamento].

2.º) Encontrada a homologia, determinam-se duas rectas, p' e q' , perpendiculares, que tenham para imagens rectas, $\bar{p}$ e $\bar{q}$, igualmente, perpendiculares.

3.º) As rectas p' e q' representam rectas p e q da figura F , uma das quais, p ou q , é, necessariamente, paralela ao plano de projecção. É preciso decidir qual delas é que é paralela ao plano de projecção.

Com o fim de decidir se é p' ou q' que representa uma recta paralela ao plano de projecção, tomemos nas rectas $\bar{p}$ e $\bar{q}$ segmentos de igual comprimento e procuremos os seus originais, que ficam em p' e q' e são, naturalmente, de diferente comprimento.

Aquela das duas rectas, p' ou q' , sobre a qual fica o segmento de maior comprimento é a que representa uma recta paralela ao plano de projecção.

A construção da figura F faz-se, agora, sem dificuldade.

Convém tomar para *base* de construção qualquer recta que seja paralela ao plano de projecção e ter em vista os seguintes princípios :

I — Sobre a base tomada (paralela ao plano de projecção) ou sobre qualquer paralela, o comprimento de qualquer segmento é, precisamente, o verificado no *desenho* (projecção, representação). A determinação de segmentos, paralelos ao plano de projecção obtém-se por simples *transporte*.

II — A paralelas correspondem paralelas.

III — Pela mesma homologia, pela qual se determinaram as rectas paralelas ao plano de projecção — e as de maior declive — se podem, também, determinar os comprimentos — *verdadeiros* — de quaisquer segmentos.

IV — Se chegarmos a construir efectivamente a figura $\bar{F}$, nesta figura encontramos os ângulos da figura F .

Determinação da posição da figura. — Conhecido o comprimento — *verdadeiro* — dum segmento duma recta a , para determinar o ângulo que a recta a faz com o plano de projecção, basta construir um triângulo rectângulo tendo para hipotenusa o verdadeiro comprimento do segmento e, para um dos seus catetos, o comprimento

verificado no desenho (projecção, representação) para o mesmo segmento.

O ângulo do plano da figura com o plano de projecção obtém-se procurando o ângulo que faz com o plano de projecção qualquer recta de maior declive.

No exercício resolvido I encontra o leitor exemplificado o método que acaba de ser indicado.

g) O resultado que se acabou de estabelecer pode ser generalizado :

Qualquer figura F' , que seja obtida por homologia afim duma figura plana F , pode, também, ser obtida duma figura $\bar{F}$ semelhante a F , não só por projecção ortogonal, mas, também, por qualquer projecção paralela arbitrariamente fixada ; e, ainda, como no caso da projecção ortogonal, a figura $\bar{F}$ fica inteiramente determinada pela figura representativa F' e pela condição de ser semelhante a F .

Sobre este assunto, baseado no princípio enunciado, esclarecendo-o e justificando-o, apresentamos o «exercício resolvido n.º XI», para o qual chamamos, nesta oportunidade, a devida atenção do leitor.

h) Acentue-se que ficou estabelecido o seguinte resultado :

Qualquer figura plana F' que seja obtida duma figura plana F por qualquer forma de homologia afim — ortogonal ou não ortogonal — ou por qualquer projecção paralela — ortogonal ou oblíqua — sempre a mesma figura F' se pode obter por qualquer homologia afim ou projecção paralela — ortogonais ou não ortogonais — duma figura $\bar{F}$ semelhante a F .

Deste modo, existe, portanto, equivalência entre as diversas formas de homologia afim e de projecção paralela.

i) Para encerrarmos a matéria que estamos a tratar e pela sua importância especial, vamos considerar o problema de transformar por homologia uma circunferência (ou uma elipse) numa elipse de forma dada.

O problema acha-se considerado nas figuras 38 e 39.

Numa e noutra das figuras se determinaram homologias que transformam uma circunferência Γ de centro O , em elipses sujeitas à condição de a razão do eixo maior para o menor ser 3:2.

Semelhante problema é indeterminado.

Em primeiro lugar, pode ser fixado, arbitrariamente, o eixo t da homologia ou a direcção.

Em segundo lugar, fixado o eixo ou a direcção da homologia,

ainda podem ser escolhidos, arbitrariamente, o par de diâmetros da circunferência, que se devem tornar nos eixos da elipse pretendida.

Na fig. 38, apresentam-se duas soluções do problema.

Na primeira, foi fixado para eixo de homologia a recta t ; na segunda a recta $\bar{t}$.

Para determinarmos a primeira solução — de eixo t — tomámos, arbitrariamente, os dois raios perpendiculares OA e OB . Nas rectas OA e OB , e a partir do centro O , tomámos, respectivamente, 2 e 3 segmentos iguais, consecuti-

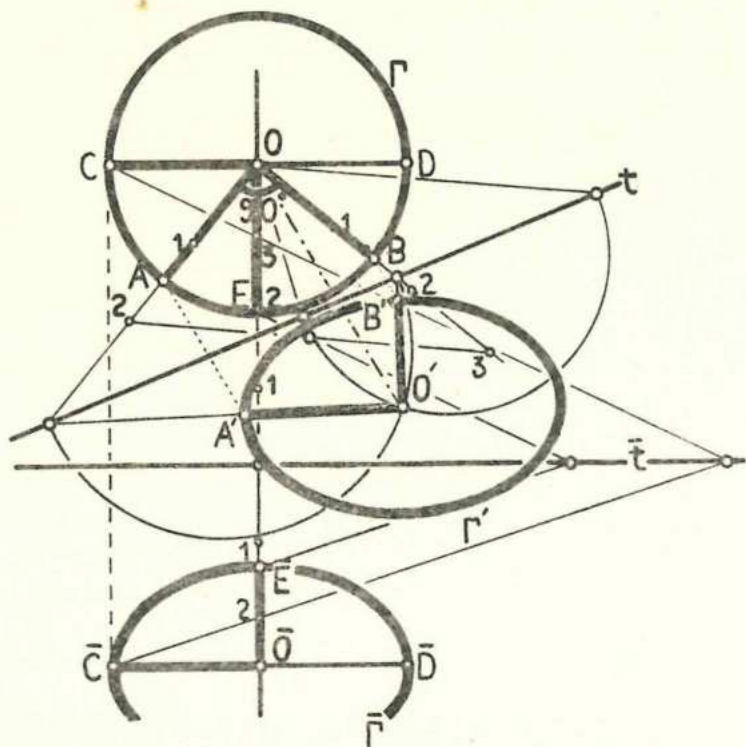


Fig. 38

vamente. Obtém-se, assim, um triângulo que tem de ser transformado em triângulo rectângulo isósceles.

Para a segunda solução apresentada — de eixo $\bar{t}$ — impôs-se que a transformação fosse determinada por homologia ortogonal. Esta condição implica que, para um dos diâmetros a transformar em eixo da elipse, seja tomado o diâmetro CD paralelo ao eixo $\bar{t}$ da homologia.

Baixou-se de O a perpendicular a $\bar{t}$ e, a partir do pé desta perpendicular, tomaram-se, respectivamente, 2 e 3 segmentos iguais, consecutivamente, obtendo-se, assim, um par de pontos correspondentes, e, desta forma se acha determinada a homologia.

Na fig. 39 apresenta-se uma terceira solução do problema.

Fixou-se, agora, arbitrariamente, a direcção da homologia.

Tomaram-se, também, arbitrariamente, os dois raios perpendiculares, OA e OB .

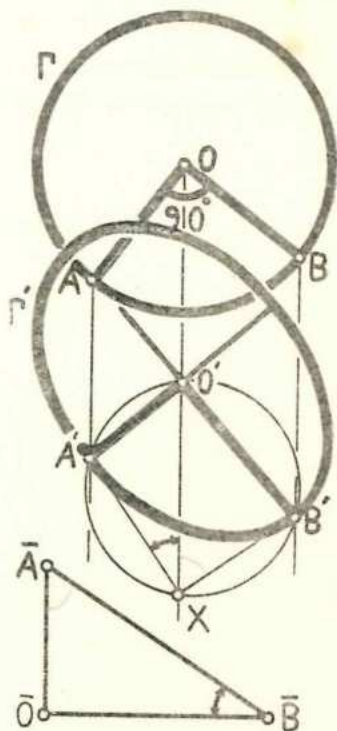


Fig. 39

Por A , B e O tiraram-se as rectas da direcção fixada. O problema reduz-se, agora, a inscrever nestas rectas um triângulo $O'A'B'$ semelhante a um triângulo $\overline{OAB}$ que deve ser rectângulo em $\overline{O}$ e ter os catetos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ na razão 2:3.

Para tanto, tomou-se um ponto X na recta que contém O e construiu-se: $A' \hat{X} O = \hat{B}$; $B' \hat{X} O = \hat{A}$; depois, desenhou-se a circunferência circunscrita ao triângulo $A'XB'$, obtendo-se O' .

Nota: Se em vez duma circunferência Γ fosse dada uma elipse, o problema era, inteiramente, análogo; é questão, apenas, de substituir diâmetros perpendiculares da circunferência por diâmetros conjugados da elipse.

Exercícios resolvidos:

I — Desenhar um triângulo equilátero $A'B'C'$, de 6 cms de lado (fig. 40).

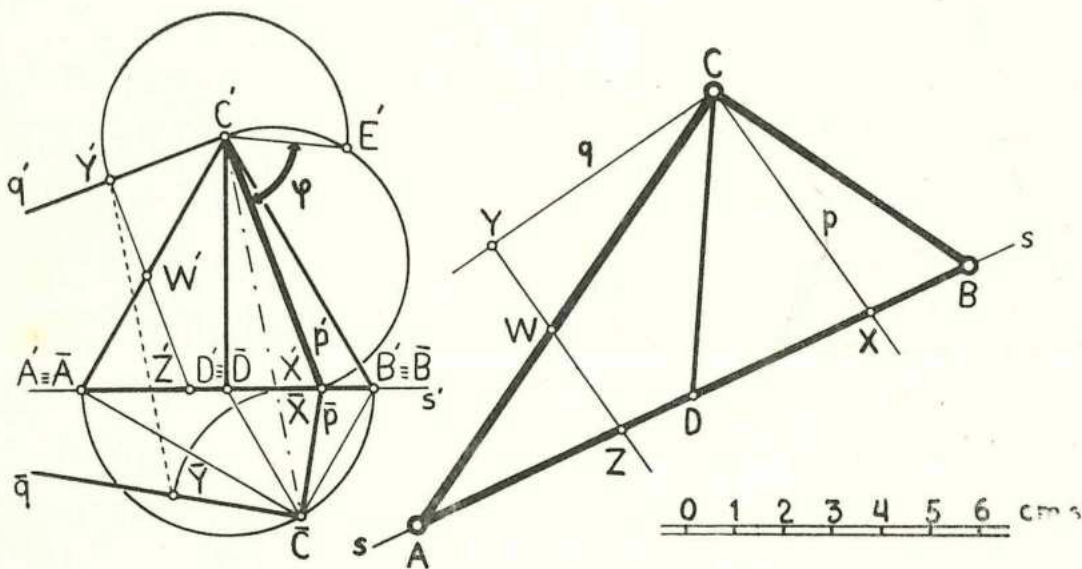


Fig. 40

Determinar e designar por D' o ponto médio do lado $A'B'$. Desenhar a mediana $C'D'$.

Construir um triângulo ABC que satisfaça às condições seguintes:

- Seja capaz de se projectar ortogonalmente no triângulo $A'B'C'$;
- Seja rectângulo em C ;
- A trissectriz do ângulo recto C se projecte na mediana $C'D'$.

Determinar, também, o ângulo φ que o plano do triângulo ABC faz com o plano de projecção.

Res.: a) *Determinação de rectas perpendiculares que representam rectas perpendiculares:*

Procurámos uma homologia afim que satisfaça às duas condições seguintes:

1.º) Transforme o triângulo $A'B'C'$ num triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, rectângulo em $\bar{C}$.

2.º) Transforme, também, $C'D'$ em trissectriz do ângulo recto $\hat{\bar{C}}$.

Tomando, como se tomou, $A'B'$ para eixo, a determinação da homologia não oferece dificuldade, porque, então, por um lado, o ponto $\bar{C}$ deve cair na circunferência de diâmetro $A'B'$ e, por outro, deve ser tal, que se tenha $\bar{C}\hat{D}'B' = 60^\circ$. Sendo $\bar{C}\hat{D}'B' = 60^\circ$, resulta $B'\bar{C} = B'D'$. Assim se determina o ponto $\bar{C}$ e, portanto, a homologia.

Encontrada a homologia, temos de determinar duas rectas perpendiculares, p' e q' , que tenham para imagem rectas, $\bar{p}$ e $\bar{q}$, igualmente, perpendiculares. É bem conhecida a construção, que foi realizada na fig. 40, dum ângulo recto com o vértice em C' que tem para imagem um ângulo recto com o vértice em $\bar{C}$.

b) Das duas rectas, p' e q' , uma representa uma recta paralela ao plano de projecção; a outra, uma recta de maior declive.

Temos de procurar a decisão. Para tanto, basta tomar em $\bar{p}$ e $\bar{q}$ segmentos iguais e determinar os originais em p' e q' . Tomou-se $\bar{C}\bar{Y} = \bar{C}\bar{X}$ ($\bar{X} \equiv X'$).

Como, relativamente aos originais, $C'Y'$ e $C'X'$, se verifica $C'X' > C'Y'$, é, necessariamente, p' que representa uma recta, p , paralela ao plano de projecção.

Está, assim, tratada a parte essencial do problema.

Temos determinados os ângulos que entram na figura pedida.

Podemos, também, determinar o verdadeiro comprimento de qualquer segmento da figura pedida. Para determinar, por exemplo, o verdadeiro comprimento do cateto AC , bastaria tomar na recta $\bar{p}$ um segmento igual a $\bar{A}\bar{C}$ e determinar o original na recta p' . O comprimento do original é, precisamente, igual ao verdadeiro comprimento de AC .

Construímos a figura pedida, porém, directamente, por intermédio das rectas p e q , servindo p , propriamente, de base de construção.

Traçámos, então, duas rectas, p e q , perpendiculares. No ponto de intersecção das rectas p e q fica o vértice C do triângulo pedido. Determinámos, depois, os pontos X e Y tendo em vista que $CY = CX = C'X'$. Traçámos por Y' a recta $Y'W'Z'$ paralela

a p' , sendo W' e Z' , respectivamente, os pontos de intersecção com $C'A'$ e $A'B'$. A correspondente da recta, $Y'W'Z'$, é a recta YWZ , paralela a p tirada por Y , sendo $YW = Y'W'$ e $YZ = Y'Z'$. Unindo X com Z , temos a recta sobre que se encontra a hipotenusa AB . Unindo C com W , temos a recta sobre que se encontra o cateto AC . Tirando em C a perpendicular a CW , temos a recta sobre que se encontra o cateto CB .

c) *Determinação do ângulo φ .* — Sobre $C'X'$, como diâmetro, desenhou-se uma semicircunferência. Construiu-se, em seguida, a corda $C'E'$ de comprimento igual a $C'Y'$, como se indica na fig.

O ângulo $E'\hat{C}'X'$, da corda com o diâmetro, é o ângulo pedido φ .

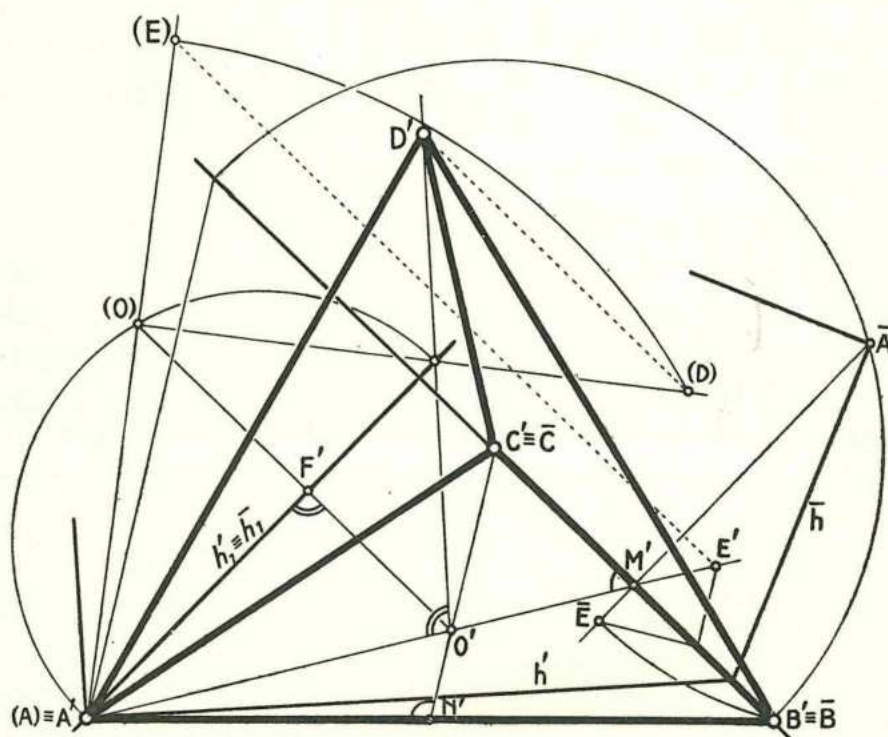


Fig. 41

II — *Desenhar um triângulo $A'B'C'$, sendo $B'C'$ igual a 4 cms; $C'A'$ igual a 5 cms; $A'B'$ igual a 7 cms (fig. 41).*

Considerar o triângulo desenhado como projecção ortogonal duma face dum tetraedro regular, $ABCD$.

Determinar a projecção do tetraedro.

Determinar, também, a verdadeira grandeza das arestas e das alturas.

Res.: Essencialmente, estamos reduzidos a achar a projecção D' do quarto vértice D do tetraedro considerado, $ABCD$.

Designemos por O o pé da perpendicular baixada do vértice D sobre o plano da face ABC . Vamos determinar a projecção O' de O .

O ponto O é, também, o ponto de cruzamento das três alturas da face ABC . Esta face é um triângulo equilátero, pelo que alturas são, também, medianas. Por consequência, as alturas projectam-se nas medianas do triângulo $A'B'C'$.

Sendo M' o ponto médio de $B'C'$; N' , o ponto médio de $A'B'$; o ponto O' , projecção de O , é, por consequência, o ponto de cruzamento das rectas $A'M'$ e $C'N'$.

Devemos, agora, determinar a projecção da perpendicular em O ao plano da face ABC .

O problema reduz-se ao problema de determinar as projecções das rectas do plano ABC paralelas ao plano de projecção.

Para tanto, procuremos uma homologia afim que transforme $A'B'C'$ em triângulo equilátero. Tomando $B'C'$ para eixo, determina-se, imediatamente, $\bar{A}$, imagem de A' , porque $\bar{B} \equiv b'$, $\bar{C} \equiv c'$; daí, $B'\bar{A} = C'\bar{A} = B'C'$.

Devemos, agora, determinar as duas rectas perpendiculares tiradas por A' , que têm para imagem rectas perpendiculares, tiradas por $\bar{A}$. Uma destas rectas está designada na fig. por h' e a sua imagem por $\bar{h}$. Deve verificar-se por simples inspecção da fig. que é a recta h' que representa uma recta paralela ao plano de projecção.

Construimos, portanto, a projecção $D'O'$ da perpendicular tirada pelo vértice D à face ABC , tirando por O' a perpendicular a h' .

Temos, pois, construída uma recta que contém a projecção D' do vértice D .

Para determinar, efectivamente, D' , observemos que DO com AO e BC , por exemplo, constituem um sistema de três rectas perpendiculares entre si, duas a duas, cujas projecções conhecemos. Estamos, portanto, habilitados a traçar, imediatamente, uma recta de nível do plano ADO e a efectuar um rebatimento deste plano (rebatimento significa tanto como homologia ortogonal).

As projecções das rectas de nível do plano ADO são perpendiculares a $B'C'$. Traçamos a projecção h'_1 , da recta de nível que passa pelo ponto A e tomámos h'_1 , para eixo do rebatimento (eixo da homologia ortogonal, que transforma a projecção em figura igual à projectada). O rebatimento (O) de O obtém-se, imediatamente, porque temos, já, a representação dum ângulo recto com o vértice no ponto O . O rebatimento (D) de D' obter-se-ia tomando o segmento (A)(D) igual ao verdadeiro comprimento dos lados do triângulo ABC . Este podia ser determinado por meio da homologia, já considerada, que transformou em triângulo equilátero o triângulo $A'B'C'$.

Não se chegou, porém, na fig. a determinar o verdadeiro comprimento dos lados do triângulo ABC . Limitámo-nos a efectuar, por meio da mesma homologia, simplesmente, o *transporte* em projecção. Traçou-se a recta $\bar{A}M'$; de centro em $\bar{A}$, traçou-se o arco $\widehat{B\bar{E}}$; determinou-se E' , original de $\bar{E}$. Assim, $A'E'$ representa um segmento igual aos lados do triângulo ABC .

Determinado E' , determina-se, a seguir, (E) .

O segmento $(A)(E)$ representa o verdadeiro comprimento de AE , portanto, também, o verdadeiro comprimento das arestas do tetraedro. Assim, também, $(A)(D)$ é igual a $(A)(E)$ e obtém-se (D) traçando a circunferência de centro em $(A) \equiv A'$ e de raio $(A)(E)$.

De (D) passa-se a D' , tirando $(D)D'$ perpendicular a h'_1 .

A verdadeira grandeza das arestas é, como já se afirmou, dada pelo segmento $(A)(E)$.

A verdadeira grandeza das alturas é dada pelo segmento $(O)(D)$.

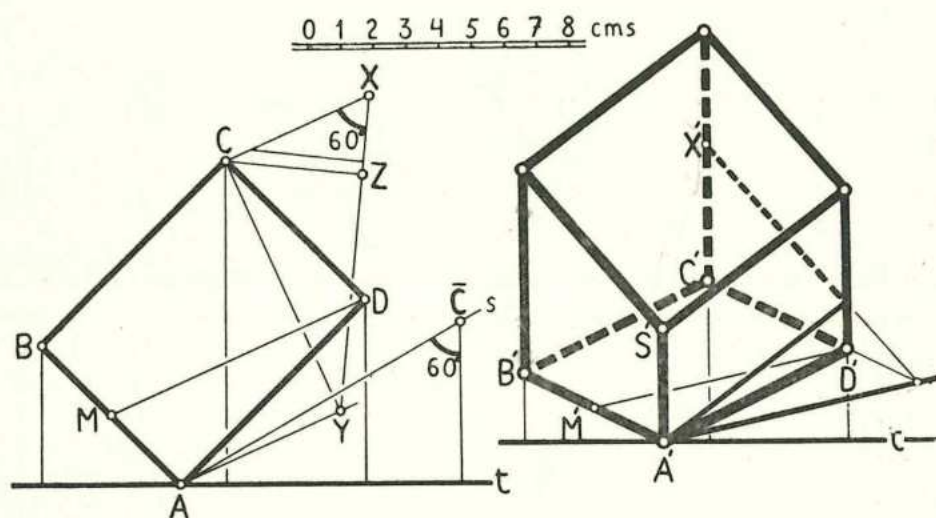


Fig. 42

III — Representar em projecção ortogonal um tronco de prisma rectangular recto, com os seguintes dados (fig. 42):

- Ângulo da base com o plano de projecção, 60° ;
- A base é um rectângulo com as dimensões $8 \text{ cms} \times 6 \text{ cms}$;
- Os lados da base devem ficar dispostos de tal maneira que todos sejam reduzidos de igual modo pela projecção, isto é, na mesma razão;

d) Para fixar o plano que determina o tronco, designemos por A o vértice da base, de menor cota; por B , o vértice de cota imediatamente superior à de A ; por D , o vértice oposto a B ; por C , o vértice oposto a A ; por M , o ponto médio de AB ; traçar a

recta DM. Nestas condições, o plano secante deve ser paralelo à recta DM, fazer 60° com as arestas e intersectar a aresta que contém o ponto A no ponto S que fica a 4 cms de A.

Res.: A melhor forma de determinar a projecção da base consiste em reduzir em razão conveniente as ordenadas dos vértices A, B, C e D. Visto que é de 60° o ângulo da base com o plano de projecção e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, cada ordenada é reduzida à sua metade.

Mas, redução numa mesma razão é operação de fácil execução prática que vai ser considerada.

Comecemos por tomar uma recta t que se poderá considerar como o traço da base no plano de projecção.

Desenhemos, em seguida, o rectângulo $ABCD$ nas condições seguintes:

- a) Podemos tomar o vértice A em t e assim o tomámos;
- b) Visto que os lados AB e AD devem sofrer reduções na mesma razão, os lados AB e AD devem formar com t ângulos iguais e, portanto, de 45°;
- c) Construídos os lados AB e AD , constrói-se o vértice C .

Representação da base. Trace-se uma recta s que forme 30° com t ou seja o complemento do ângulo da base com o plano de projecção. Na figura, esta recta foi tirada pelo ponto A . Por meio desta recta s é que se faz de modo simples a redução das ordenadas.

Para ter o valor reduzido duma ordenada, basta marcá-la sobre a recta s , a partir de A , e determinar, em seguida, a compasso, simplesmente, a distância do ponto atingido à recta t . Assim, por exemplo, para a ordenada do vértice C , o ponto atingido é $\bar{C}$, isto é, $A\bar{C}$ igual à ordenada de C , e a ordenada reduzida a considerar é a distância de $\bar{C}$ à recta t , distância a determinar simplesmente com o compasso.

Assim se obtém de maneira inteiramente fácil a projecção da base.

As arestas projectam-se, e são, portanto, representadas por meio de rectas perpendiculares a t .

Resta representar a secção que determina o tronco.

O plano secante deve intersectar o plano da base segundo uma recta paralela a DM . Em vez de tomarmos um plano que contivesse a própria recta DM , para melhores dimensões para a construção que vamos executar, tomámos um plano que passe pelo vértice A e intersecte o plano de base segundo a paralela tirada por A à recta DM e forme com as arestas 60°.

Procuremos, agora, a distância do ponto C ao ponto X de

intersecção do plano, que acabamos de considerar, com a aresta do prisma, que passa por C .

A determinação da distância pode efectuar-se do seguinte modo:

a) Trace-se a perpendicular CY ao traço do plano. O triângulo CYX é rectângulo em C (o prisma é recto) e o ângulo CXY mede 60° , pois XY é recta de maior declive do plano secante (de maior declive, relativamente ao plano da base, que é este o plano que interessa na presente questão);

b) Visto que conhecemos o tamanho — CY — dum cateto e o ângulo agudo oposto — 60° —, pode construir-se o triângulo CXY . Assim se determina, pois, a distância do ponto C ao ponto X . O tamanho reduzido desta distância a tomar em projecção, atendendo a que as arestas formam com o plano de projecção 30° — complemento do ângulo de 60° do plano da base com o plano de projecção — obtém-se tomando a distância CZ de C a XY .

A parte restante da construção não precisa de qualquer esclarecimento.

O comprimento reduzido $A'S'$ de AS obteve-se de modo análogo ao de CX .

Nota: Se apresentarmos o desenho obtido do tronco, com a afirmação de que se trata de representação em projecção ortogonal dum prisma rectângulo recto em que as dimensões da base estão na razão 2:3, podemos pelo desenho, sem qualquer outro elemento, reconstruir, integralmente, o tronco de prisma representado.

IV — *Representar em projecção ortogonal um tronco de pirâmide pentagonal regular, com os seguintes dados (fig. 43):*

- a) *Ângulo do plano da base com o plano de projecção 60° ;*
- b) *Raio da circunferência circunscrita à base, 5 cms;*
- c) *Um dos lados da base deve fazer $37^\circ,5$ com o plano de projecção;*
- d) *A altura da pirâmide mede 11 cms;*
- e) *O plano que determina o tronco é paralelo ao lado da base que faz $37^\circ,5$ com o plano de projecção e é assim definido: forma 30° com o plano da base e intersecta o eixo da pirâmide num ponto que dista 6 cms do centro da base.*

Res.: Apresenta-se em primeiro lugar o problema de construir no plano da base uma recta que faça $37^\circ,5$ com o plano de projecção.

Trata-se do problema geral seguinte:

Num plano α , que faz um ângulo φ com o plano de projecção, construir uma recta p que faça com o plano de projecção um ângulo γ .

ângulo. Sobre s tomou-se o ponto $\bar{O}$, sendo $Y\bar{O}$ igual ao segmento de maior declive correspondente ao ponto O (ordenada de O), ou seja $Y\bar{O} = OT$, designando por T o traço da recta de maior declive que contém o ponto O . Sendo Z o pé da perpendicular baixada de $\bar{O}$ a b , o segmento YZ representa a cota do ponto O . Resta tirar YX de forma a fazer com a perpendicular $\bar{O}Z$ a b o ângulo considerado, de $37^{\circ},5$. [Este ângulo foi construído por meio da circunferência de centro em Z e raio ZY e a construção reduz-se a determinar nesta circunferência um arco de 15°].

A hipotenusa XY dá o comprimento do segmento que tem um extremo no ponto O , o outro no plano de projecção, e faz $37^{\circ},5$ com o plano de projecção.

Tomando no traço t do plano da base o ponto U , tal que $OU = XY$, a recta OU é a recta procurada, que passa por O e faz $37^{\circ},5$ com o plano de projecção.

Desenhada a circunferência de centro em O e de 5 cms de raio, temos, agora, de lhe inscrever um pentágono regular $ABCDE$ com um lado, CD , paralelo a OU .

O traçado do polígono representativo da base (projecção da base) não oferece dificuldade. Reduzem-se, do mesmo modo como se procedeu no exercício precedente, por meio das rectas s e b , as ordenadas correspondentes.

Construção do plano que determina o tronco: — Designa-se por S o ponto de intersecção deste plano com o eixo da pirâmide. Por condição, impõe-se $SO = 6$ cms. A recta OA é a projecção (sobre o plano da base) da recta de maior declive do plano, tirada pelo ponto S . Desta forma, se for Q o traço (no plano da base) da recta de maior declive, o ângulo em Q do triângulo SOQ , rectângulo em O , mede, precisamente, 30° . Pode-se, pois, construir o triângulo SOQ e determinar-se, assim, o ponto Q .

O traço q do plano que determina o tronco é paralelo ao lado CD e passa pelo ponto Q .

Nenhuma dificuldade existe em construir, agora, a representação. A construção apresentada compreende-se, sem que sejam necessários esclarecimentos.

O comprimento reduzido, que apresenta o segmento OS , obtém-se por meio do ângulo de 60° que se encontra desenhado.

Nota: Pelo desenho apresentado é inteiramente possível reconstruir, integralmente, a figura representada, se simplesmente se afirmar que se trata duma pirâmide regular e duma representação em projecção ortogonal.

[Forma e projecção determinam a figura projectada].

V — Representar em projecção ortogonal uma secção elíptica dum cone recto, de revolução, com os seguintes dados (fig. 44).

- Ângulo do plano da base com o plano de projecção, 60° ;
- Raio da base, 5 cms. Altura do cone, 10 cms;
- O plano secante deverá ser convenientemente escolhido.

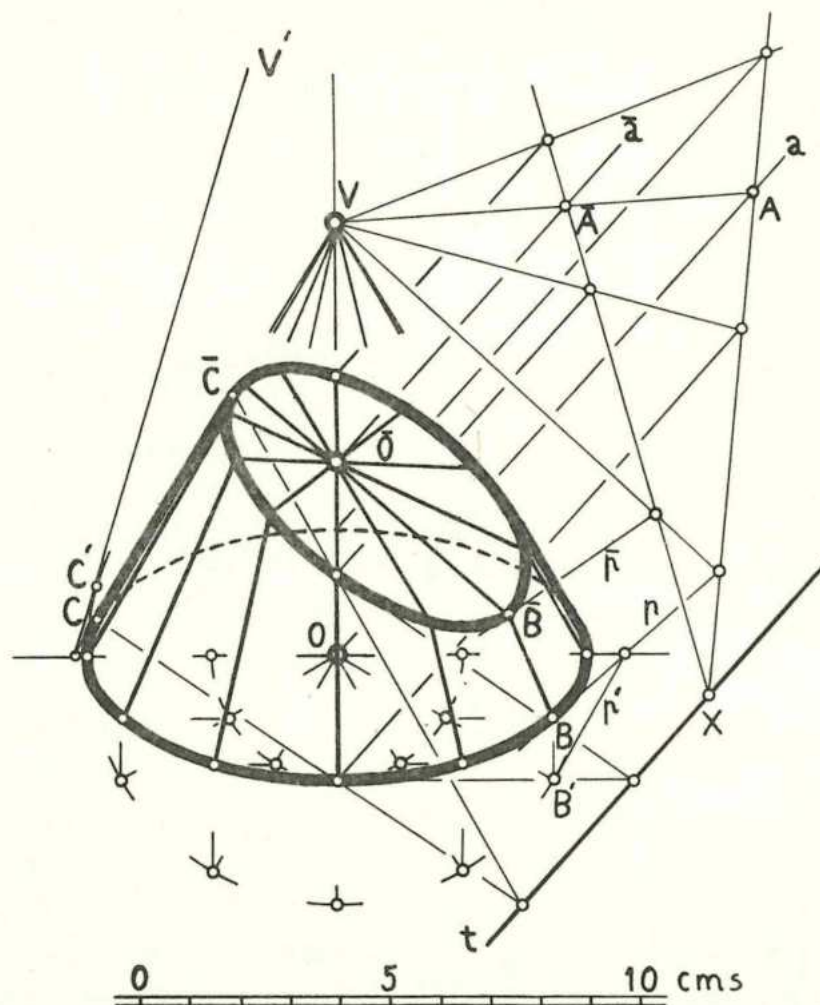


Fig. 44

Res.: *Representação da base.* — A base projecta-se numa elipse. O eixo maior mede 10 cms. O eixo menor obtém-se por meio de construção dum ângulo de 60° .

A elipse foi construída pelo processo bem conhecido, que tem por base o traçado das circunferências principais, isto é, das circunferências que têm para diâmetros os eixos da elipse. As circun-

ferências foram divididas em 12 partes e, assim, construídos 12 pontos da elipse.

O eixo faz 30° com o plano de projecção. Desta forma, podemos servir do ângulo desenhado, de 60° , para determinar o comprimento reduzido, que se apresenta na projecção, da altura do cone.

O plano secante, que se escolheu, encontra-se definido pela recta t , traço do plano no plano da base, e pelo ponto $\bar{O}$, ponto de intersecção do plano secante com o eixo do cone.

A projecção determina uma homologia. O eixo de homologia é a recta t ; o centro é o vértice, V ; O e $\bar{O}$ são pontos correspondentes.

Convém fazer as seguintes determinações que se encontram, também, feitas na fig. 44:

a) Os pontos da elipse que estão nas geratrizes de contorno. Nestes pontos a elipse é tangente às respectivas geratrizes.

[Para evitarmos sobreposições e conseguirmos boas condições de desenho, tomámos o seguinte caminho. Pelos pontos O e $\bar{O}$, respectivamente, tirámos paralelas, a e $\bar{a}$, a t . As rectas a e $\bar{a}$ são correspondentes. Por meio delas, determinámos, em seguida, um par de pontos correspondentes, A e $\bar{A}$. Tomámos um ponto X em t e unimo-lo com os pontos A e $\bar{A}$. As rectas obtidas, XA e $X\bar{A}$ são correspondentes. Foram construídas com o fim de servirem de rectas auxiliares nas determinações a fazer. Estas serão feitas por meio destas rectas e de paralelas a t , tendo em vista que uma recta paralela a t tem por correspondente uma recta, igualmente, paralela a t].

b) Os pontos da elipse e respectivas tangentes, que ficam nas geratrizes cujas projecções ficam sobrepostas às projecções do eixo do cone.

c) As tangentes p e $\bar{p}$ nos pontos B e $\bar{B}$. Para tanto, traçámos a tangente, p' , no ponto B' à circunferência principal; determinámos a sua correspondente, p — correspondente na homologia afim que transforma a circunferência principal na elipse representativa da base do cone; finalmente, a tangente $\bar{p}$ é a recta homóloga de p , na homologia que transforma a elipse representativa da base na elipse representativa da secção.

Nota 1.^a — É manifesto que o problema da determinação da secção se pode resolver directamente, sem que haja necessidade de se falar e de se considerar a teoria da homologia.

Nota 2.^a — Afirmando-se que a figura representa em projecção ortogonal um cone recto de revolução, pela figura pode-se construir, integralmente, o cone e a secção elíptica representada.

[A projecção e a forma determinam a figura representada].

Nota 3.^a — Para dar mais relevo à representação, figuraram-se as secções feitas pelos planos meridianos determinados pelas geratrizes consideradas, planos que dividem o cone em partes iguais.

VI — Representar em projecção ortogonal uma secção hiperbólica dum cone recto de revolução com os seguintes dados (fig. 45):

a) Ângulo do plano da base com o plano de projecção, 60° ;

b) Raio da base, 5 cms. Altura do cone, 10 cms;

c) O plano secante deve ser paralelo ao eixo do cone e intersectar a base por uma recta de nível.

Res.: O cone é o mesmo que o do exercício anterior e com as mesmas condições. A representação é, portanto, a mesma que foi apresentada no exercício anterior.

O plano secante foi representado por meio do seu traço, t , no plano da base do cone, sendo t uma

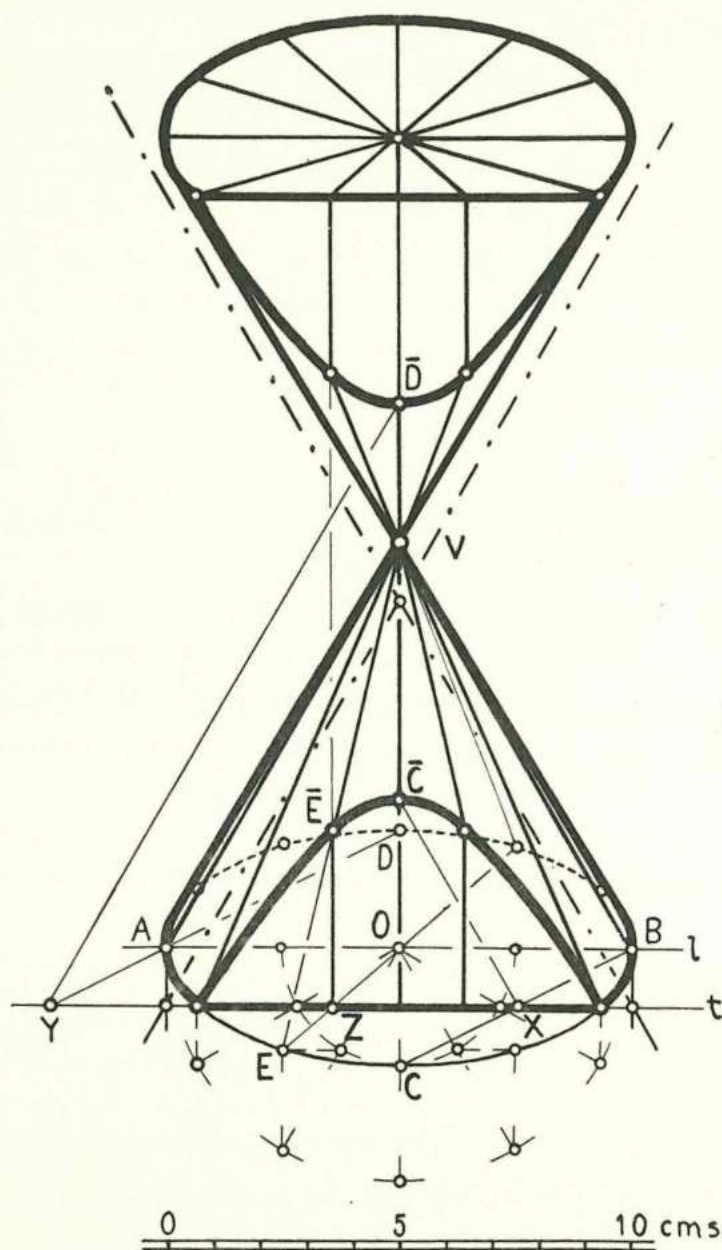


Fig. 45

recta de nível deste plano. É o plano que contém t e é paralelo ao eixo do cone.

Resulta uma homologia. A recta t é o eixo; o vértice V , o centro; a recta limite, l , sobrepõe-se ao eixo maior da ellipse que representa a base do cone.

A secção é uma hipérbole. A construção faz-se sem dificuldade.

Convém, em primeiro lugar, determinar as assíntotas. Estas são paralelas, respectivamente, às geratrizes do cone que passam pelos extremos, A e B , do diâmetro de nível da base. Construindo as tangentes à base nos pontos A e B , as assíntotas passam, respectivamente, pelos pontos de intersecção destas tangentes com t .

Foram, em seguida, determinados os pontos da hipérbole que ficam nas 12 geratrizes consideradas na representação.

[Para determinar o ponto $\overline{C}$, correspondente do extremo C do diâmetro de maior declive da base, uniu-se C com B e procurou-se a recta correspondente de CB . Esta, $\overline{CX}$, é paralela à geratriz VB].

[Para determinar o ponto $\overline{D}$, correspondente do extremo D do diâmetro de maior declive da base, uniu-se D com A e procurou-se a recta correspondente de DA . Esta, $\overline{DY}$, é paralela à geratriz VA].

[Para determinar o ponto $\overline{E}$, correspondente de qualquer outro ponto E da base, uniu-se E com o centro O da base e procurou-se a recta correspondente de EO . Esta, $\overline{EZ}$, é paralela ao eixo do cone].

Nota 1.^a — É manifesto que o problema da determinação da secção se pode resolver directamente, sem que haja necessidade de se falar e de se considerar a teoria da homologia.

Nota 2.^a — Afirmando-se que a figura representa em projecção ortogonal um cone recto de revolução, pela figura, simplesmente, pode-se construir, integralmente, o cone e a secção hiperbólica representada. [A projecção e a forma determinam a figura representada].

Nota 3.^a — Para dar mais relevo à representação, figuraram-se as secções feitas pelos planos meridianos determinados pelas geratrizes consideradas, planos que dividem o cone em partes iguais.

VII — *Representar em projecção ortogonal uma secção parabólica dum cone recto de revolução, com os seguintes dados (fig. 46):*

- a) *Ângulo do plano da base com o plano de projecção, 45° ;*
- b) *Raio de base, 5 cms. Altura do cone, 13 cms;*
- c) *O plano secante deve ser convenientemente escolhido.*

Res.: A elipse que representa a base do cone tem de eixo maior, como nos exercícios antecedentes, 10 cms. O comprimento do eixo menor foi obtido construindo um ângulo de 45° e por meio deste ângulo, também, o comprimento reduzido que apresenta, na representação, a altura. A elipse que representa a base, foi construída, como nos exercícios antecedentes, pelo processo das circunferências principais, determinando-se 12 pontos.

O plano secante deve ser paralelo a uma geratriz do cone. Encontra-se determinado pelo seu traço t no plano da base. O traço t

foi construído de modo que o plano secante resulte paralelo a uma geratriz que passe por um dos 12 pontos considerados na base.

Resulta uma homologia. O eixo é o traço t do plano secante; o centro é o vértice V do cone; a recta limite, l , sobrepõe-se à tangente, paralela a t , à elipse que representa a base do cone.

Os pontos determinados da secção foram obtidos do seguinte modo:

Ponto $\bar{A}$: — corresponde ao extremo A do diâmetro de maior declive da base. Obteve-se traçando a recta AXU ; X , ponto de t ,

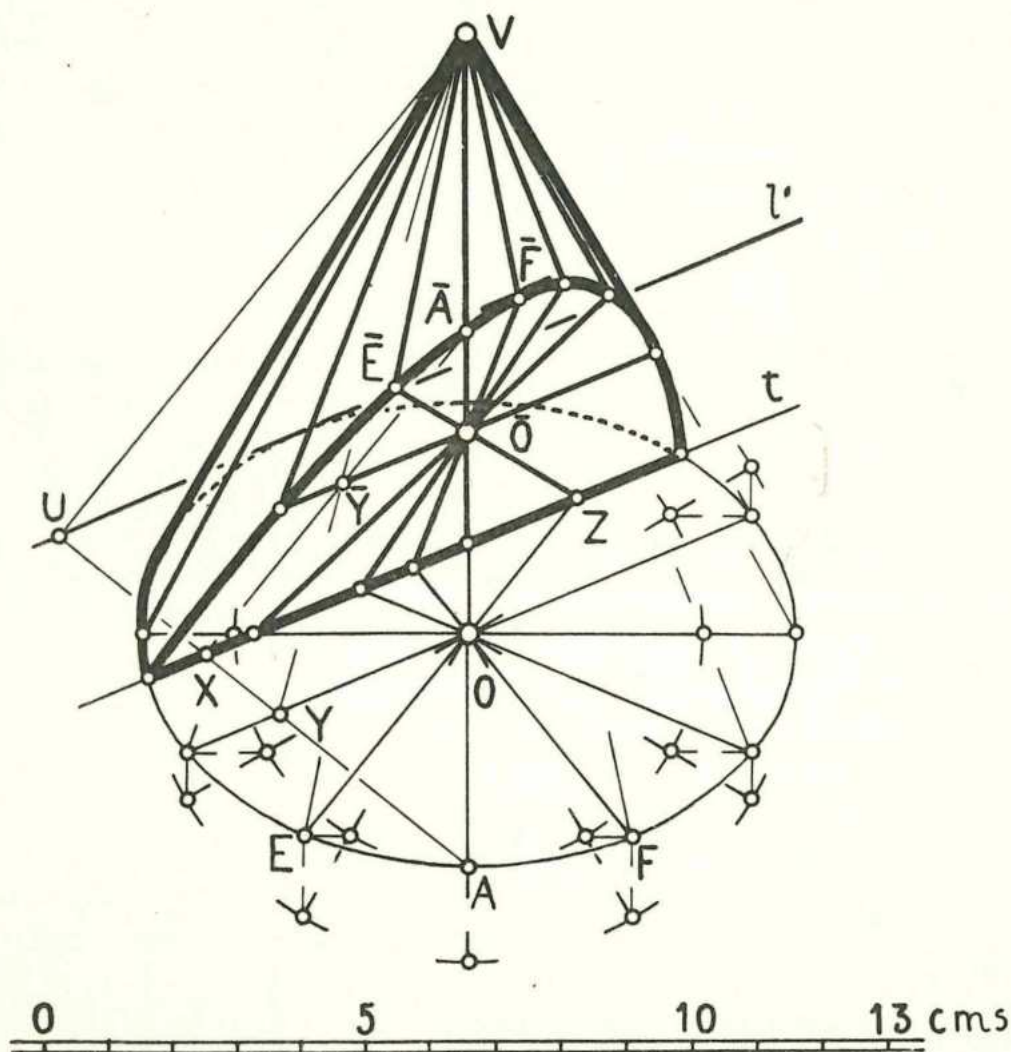


Fig. 46

U , ponto de l . A recta correspondente, $\bar{A}X$, passa por X e é paralela a VU .

[Ponto $\bar{O}$: — corresponde ao centro O da base. Não pertence à secção, mas determinou-se para servir de ponto auxiliar. Traçou-se OY paralela a t ; Y , ponto de AX . Determinou-se $\bar{Y}$, correspondente de Y , em $\bar{A}X$, e, depois, traçou-se $\bar{Y}\bar{O}$ paralela a t].

Ponto $\bar{E}$: — corresponde a um dos pontos, E , considerados na base do cone. Foi determinado por intermédio dos pontos O e $\bar{O}$. Traçou-se a recta EOZ ; Z , ponto de t . A correspondente, $\bar{E} \bar{O} Z$, obtém-se unindo Z com $\bar{O}$. Esta construção serve de modelo para os restantes pontos determinados.

Convém, ainda, determinar a tangente à parábola, paralela a t .

Como a tangente, paralela a t , à elipse que representa a base do cone, tem para ponto de contacto o ponto F , temos, apenas, que traçar a paralela a t , tirada pelo ponto $\bar{F}$ correspondente de F .

Nota 1.^a — É manifesto que o problema da determinação da secção se pode resolver directamente, sem que haja necessidade de se falar e de se considerar a teoria da homologia.

Nota 2.^a — Afirmando-se que a figura representa em projecção ortogonal um cone recto de revolução, pela figura, e simplesmente pela figura, pode-se construir, integralmente, o cone e a secção parabólica representada. [A projecção e a forma, determinam a figura representada].

Nota 3.^a — Para dar mais relevo à representação, figuraram-se as secções feitas pelos planos meridianos determinados pelas geratrizes consideradas, planos que dividem o cone em partes iguais.

VIII - *Representar em projecção ortogonal uma esfera com os seguintes dados e os seguintes elementos (fig. 47):*

- a) *Raio da esfera, 6 cms;*
- b) *Um ponto Z da esfera. O ponto Z deve ser fixado de modo que seja de 4 cms o comprimento reduzido, que apresenta na representação, o raio que une o ponto ao centro O da esfera;*
- c) *Os pontos que dividem o raio OZ em 8 partes iguais, com as circunferências da esfera que têm para centros estes pontos e cujos planos são paralelos ao plano de projecção;*
- d) *Três secções meridianas que passem pelo ponto Z , sendo uma delas feita pelo plano que admite a recta ZO como recta de maior declive.*

Res.: O presente exercício tem por finalidade falar de relevo e dar relevo a uma representação.

a) O contorno da esfera é uma circunferência, de centro no ponto fixado como representante do centro da esfera e de raio igual ao raio da esfera — 6 cms;

b) *Circunferências pedidas:* — As circunferências pedidas representam-se por circunferências, visto que os seus planos são paralelos ao plano de projecção. Os centros ficam nos pontos que dividem ZO em 8 partes iguais. Resta determinar os seus raios.

Determinação dos raios: — Rebata-se o plano que projecta OZ . A circunferência determinada na esfera por este plano rebate-se no contorno da esfera, mas, para evitar sobreposição de figuras, o rebatimento apresenta-se em fig. auxiliar.

Por este rebatimento determinam-se, imediatamente, os raios, como se encontra indicado na fig. auxiliar.

Nota: Supondo o raio OZ colocado verticalmente (a letra Z foi propositadamente usada, como letra inicial da palavra *zénite*) o ângulo notado na fig. por α é o ângulo de declive do plano de projecção, isto é, o ângulo do plano de projecção com o plano do *horizonte*.

c) *Secções meridianas:* As secções meridianas são representadas por elipses cujos eixos maiores são diâmetros do contorno da esfera. Na fig. apenas representámos semi-elipses correspondentes ao hemisfério visível que supomos ser aquele onde fica situado Z .

A secção que admite a recta OZ como recta de maior declive projecta-se na elipse cujo eixo menor tem um extremo na projecção de Z . O seu eixo maior é, portanto, o diâmetro do contorno, perpendicular a OZ . A melhor maneira de construir esta elipse é pelo processo da tira de papel.

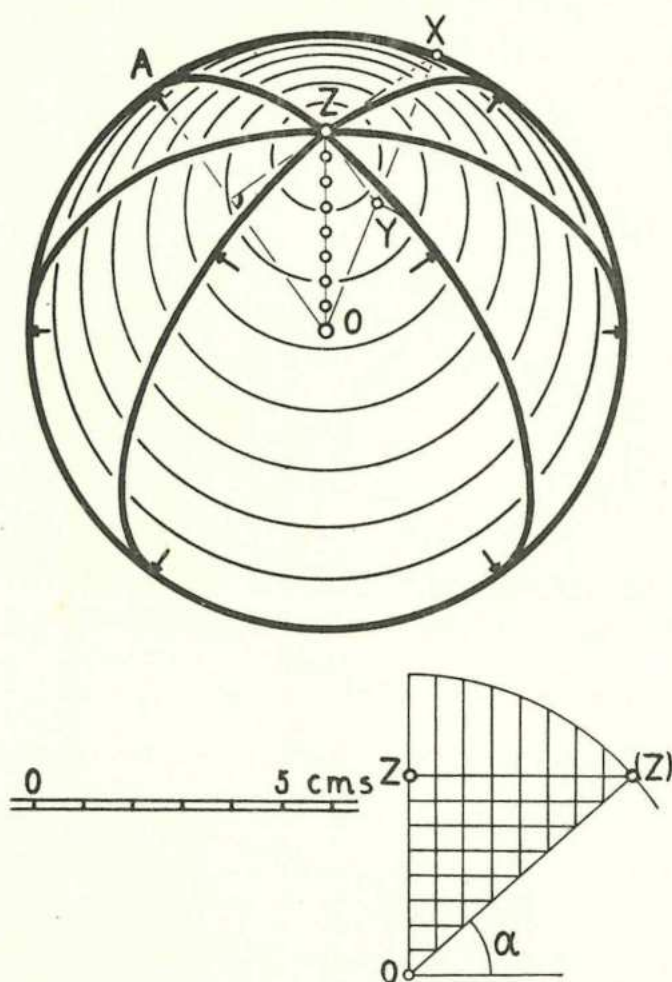


Fig. 47

Para as duas outras secções, é-nos dada a liberdade de escolher os eixos maiores das elipses que as vão representar.

Fixámos o ponto A — sobre o contorno da esfera — para extremo do eixo maior duma destas elipses. O contorno da esfera é, também, a circunferência principal maior da elipse. Procurou-se a circunferência principal menor. Para tanto, tirou-se $ZX \perp OA$, sendo X ponto do contorno; depois, tirou-se $ZY \parallel OA$; determinou-se, finalmente, a

intersecção Y de OX com ZY . O ponto Y obtido é um ponto da circunferência principal menor.

A outra secção, que tomámos, foi a que apresenta o mesmo declive (relativamente ao plano de projecção) que a secção acabada de construir. Desta forma, a elipse, que representa a secção, tem as dimensões da mesma elipse, acabada de construir.

Nota: Para não sobrecarregarmos a figura com linhas, quase inúteis, limitámo-nos a apontar, simplesmente, os vértices das elipses apresentadas.

IX — Representar em projecção ortogonal uma esfera com os seguintes dados e os seguintes elementos (fig. 48).

a) Raio da esfera, 5 cms;

b) Um ponto Z da esfera. Este ponto deve ser tal que seja de 4 cms. o comprimento reduzido, que apresenta em projecção, o raio que une o ponto ao centro O da esfera;

c) Um cubo circunscrito à esfera, sendo Z ponto de contacto duma das suas faces;

d) As secções determinadas na esfera pelos três planos medianos do cubo.

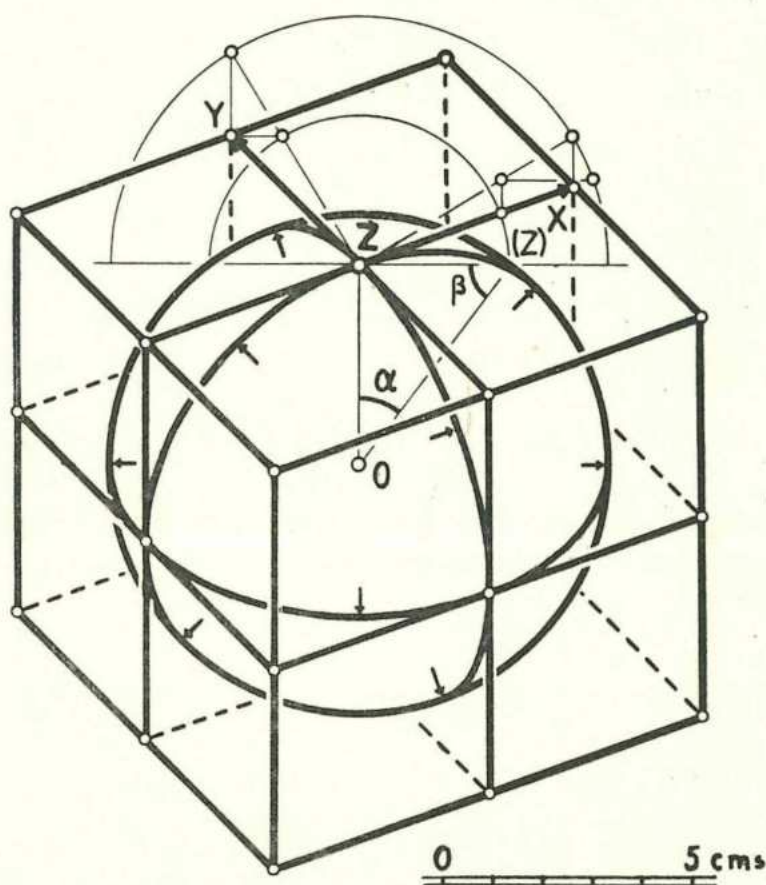


Fig. 48

Res.: O contorno da esfera é uma circunferência, de 5 cms de raio com o centro no ponto que representa o centro da esfera.

a) Representação do cubo. — Quatro das arestas do cubo são paralelas a ZO . Temos a liberdade de escolher uma das direcções das restantes arestas entre as direcções perpendiculares a OZ . Escolhemos a direcção ZX . A terceira e última direcção será determinada resolvendo um problema de perpendicularidade.

Consideremos, para tanto, a circunferência de centro em Z , de

raio igual ao raio da esfera, situada no plano perpendicular em Z ao raio OZ . Esta circunferência projecta-se numa elipse e o problema de perpendicularidade, que temos a resolver, reduz-se ao problema de determinar *direcções conjugadas*, relativamente a esta elipse. O eixo maior da elipse é igual ao diâmetro da esfera e fica na perpendicular em Z a OZ . O comprimento do eixo menor pode ser determinado procurando o ângulo do plano da circunferência com o plano de projecção. Este ângulo é complementar do ângulo de OZ com o plano de projecção, porque o plano é perpendicular a OZ . Construindo o triângulo $ZO(Z)$, rectângulo em Z , sendo (Z) ponto do contorno da esfera, este triângulo, manifestamente, é tal que o ângulo α em O representa o ângulo de OZ com o plano de projecção e o ângulo β em (Z) , portanto, o ângulo do plano da circunferência com o plano de projecção. O tamanho do semieixo menor é, precisamente, o tamanho do cateto $Z(Z)$.

Determinado o eixo menor, estamos habilitados a determinar, por um processo bem conhecido, apresentado na fig., o diâmetro ZY conjugado de ZX .

Arbitrada a direcção ZX e determinada a direcção ZY , nenhuma dificuldade se apresenta, agora, em construir a projecção do cubo.

b) *Secções determinadas pelos planos medianos.* — As secções são circunferências máximas da esfera. Não oferece, também, dificuldade o problema da construção das elipses representativas.

De cada uma delas pode determinar-se, imediatamente, o eixo maior. De facto, conhecemos, para cada secção, a direcção perpendicular ao plano que a determina; e o eixo maior da elipse, que representa uma secção, deve ser perpendicular à direcção perpendicular ao plano que a determina. Conhecemos, também, para cada uma das elipses, dois diâmetros conjugados. O melhor processo para construir as elipses é seguir o método que empregámos no caso análogo tratado no exercício antecedente, determinando os eixos menores. Na figura apontam-se, sòmente, os vértices.

X — Representar em projecção ortogonal uma esfera com os seguintes dados e os seguintes elementos (fig. 49):

- a) *Raio da esfera, 6 cms;*
- b) *Um ponto Z da esfera. Este ponto deve ser tal que seja de 4 cms, o comprimento reduzido, que apresente em projecção o raio que une o ponto ao centro O da esfera;*
- c) *Um cubo inscrito na esfera com quatro arestas paralelas a OZ .*

Res.: Método a seguir: — Constroi-se qualquer cubo com o

centro no centro da esfera e com quatro arestas paralelas a OZ . Depois, determinam-se os pontos de intersecção das diagonais com a esfera.

Nós construímos, pelo processo seguido no exercício anterior, um cubo circunscrito à esfera, com Z para ponto de contacto duma das suas faces. Limitámo-nos, porém, o que é suficiente para o fim

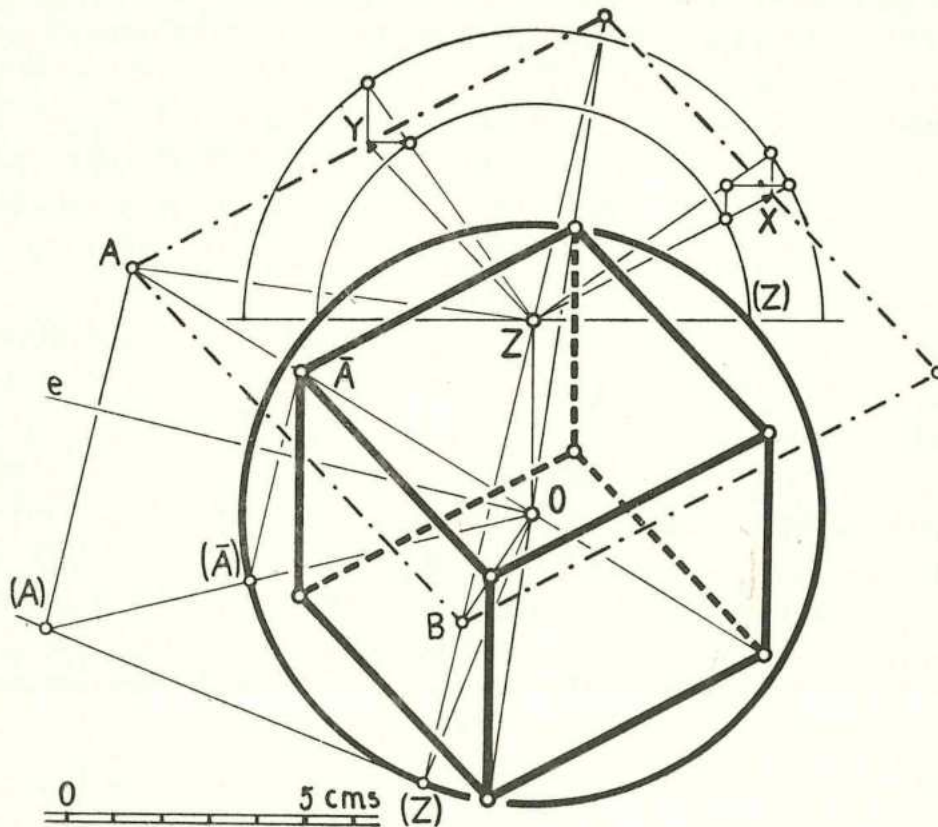


Fig. 49

que temos em vista, à construção, apenas, duma face, precisamente, da face que contacta a esfera no ponto Z .

As diagonais do cubo pedido caem nas rectas que unem os vértices da face construída ao centro da esfera.

Consideremos uma destas rectas, que unem os vértices da face construída ao centro da esfera; e designemos por A o vértice que ela contém. Temos de determinar a intersecção de OA com a esfera. A melhor maneira de resolver este problema é efectuar o rebatimento do plano ZOA , operação que se executa com facilidade. Convém que o eixo do rebatimento passe pelo centro da esfera, porque, então, a secção feita na esfera pelo plano ZOA rebate-se sobre o contorno da esfera. Ora, ZA é diagonal duma face

do cubo circunscrito, por consequência, a outra diagonal ZB da mesma face é perpendicular ao plano ZAO . Assim, o eixo e do rebatimento deve ser perpendicular a ZB , portanto, pela razão aduzida, ser a perpendicular tirada por O a ZB .

[Para efectuar o rebatimento, notar que (Z) cai no contorno da esfera e $ZA \perp ZO$].

Obtida a projecção $\bar{A}$ dum vértice do cubo inscrito, nenhuma dificuldade se oferece em completar o desenho.

XI — *Um cilindro tem para base uma elipse de eixos iguais a 12 cms e 8 cms. As suas geratrizes fazem 60° com o plano da base.*

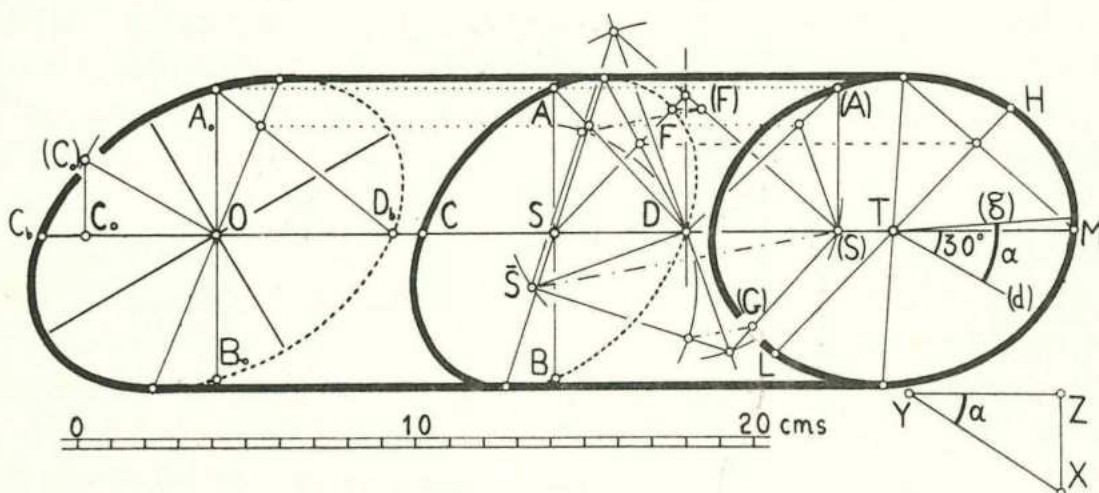


Fig. 50

base. As projecções ortogonais das geratrizes sobre o plano da base fazem 30° com o eixo maior da base (fig. 50):

- Efectuar uma representação do cilindro em projecção ortogonal sobre um plano paralelo ao plano da base;
- Efectuar, depois, a representação duma secção recta do cilindro, distando o centro desta secção 20 cms do centro da base;
- Efectuar, finalmente, a representação duma secção circular do cilindro, distando o centro desta secção 20 cms do centro da secção recta.

Res.: a) *Determinação da secção recta:* — Designemos por O o centro da base do cilindro; por $A_o B_o$, o diâmetro da base que se projecta perpendicularmente às projecções das geratrizes, por $C_b D_b$, o diâmetro que se projecta paralelamente às projecções das geratrizes.

Comecemos por considerar a secção recta feita pelo plano perpendicular às geratrizes tirado pelo centro da base do cilindro.

É claro que, determinada esta secção recta, para se obter qualquer outra, é questão, apenas, de se executar uma simples translação.

Na determinação duma secção recta há um elemento que se apresenta imediatamente em consideração. É o diâmetro paralelo ao plano de projecção. Este diâmetro projecta-se perpendicularmente às projecções das geratrizes.

Na secção, que, agora, estamos a considerar, este diâmetro é o próprio diâmetro $A_o B_o$ da base.

Um segundo diâmetro, a determinar, é o de maior declive. Talvez a melhor forma de o obter seja efectuar um rebatimento do plano que o projecta. Foi o que fizemos. O plano, que projecta este diâmetro, é, também, o plano que projecta o eixo do cilindro, o diâmetro $C_b D_b$ da base e as geratrizes que passam pelos extremos deste diâmetro. Rebatemos o plano sobre o plano base. O diâmetro $C_b D_b$ é o eixo do rebatimento. A geratriz que passa por C_b rebate-se em $C_b(C_o)$, sendo o ângulo de $C_b(C_o)$ com $C_b D_b$ igual a 60° . O diâmetro de maior declive rebate-se em $O(C_o)$, sendo $O(C_o) \perp C_b(C_o)$. Donde o rebatimento (C_o) dum dos seus extremos, donde a projecção C_o .

Determinados o diâmetro de nível e o de maior declive, pode considerar-se resolvido o problema. Os dois diâmetros determinam o plano da secção e fica, também, determinada a homologia-afim que liga a representação da base com a representação da secção.

Resta efectuar o transporte para a secção pedida.

O centro desta, que designamos por S , deve distar de O 20 cms e, como o eixo do cilindro faz 60° com o plano de projecção, esta distância reduz-se a metade, isto é, a 10 cms. Assim tomámos S , sendo $SO = 10$ cms. Fixado S , por simples transporte se obtêm os diâmetros AB e CD , de nível e de maior declive da secção pedida.

A elipse, que temos de desenhar, é, como se disse, homológica-afim da base. São pontos correspondentes A_o e A , B_o e B , D_b e D . Convém determinar os pontos de contacto com o contorno. Para tanto, basta determinar o diâmetro correspondente do que une os pontos de contacto da base com o contorno. Para esta determinação, servimo-nos das rectas correspondentes $A_o D_b$ e AD .

b) *Determinação da secção circular*: — Para a determinação da secção circular, necessitamos dos eixos da secção recta — dos eixos propriamente ditos — não dos eixos da elipse representativa. Devemos, por isso, efectuar um rebatimento. Mas esta operação de

rebatimento não oferece qualquer dificuldade, porque dispomos, já, dos elementos precisos para a executar.

Rebatemos o plano da secção recta sobre o plano de nível do ponto D . O eixo do rebatimento é a paralela a AB tirada por D . Obtém-se imediatamente o rebatimento (S) do centro S , porque já temos determinada a verdadeira grandeza de SD , que foi encontrada no rebatimento anteriormente feito, e é $O(C_o)$. Tomou-se, portanto, $D(S) = O(C_o)$. Convém, para resolver o problema — que temos de resolver — de transformar a elipse em circunferência — de determinar, também, o rebatimento do diâmetro conjugado de SD , isto é, do diâmetro que une os pontos de contacto com os contornos. Esta operação foi realizada por meio das rectas correspondentes AD e $(A)D$.

Para transformar a elipse em circunferência, tomámos, como é usual, para eixo de homologia-afim a paralela tirada por D ao conjugado do diâmetro $D(S)$, isto é, ao rebatimento do diâmetro que une os pontos de contacto com o contorno, (S) tornou-se $\bar{S}$. Determinados os eixos, encontrou-se: semieixo maior, $(S)(F)$, projectado em SF ; semieixo menor, $(S)(G)$.

Passemos, agora, à determinação da secção circular.

Designámos o centro desta secção por T e deve ser na representação $ST = OS = 10$ cms.

O diâmetro da secção, que é paralelo ao plano da secção recta, projecta-se no eixo maior desta secção; é-lhe, também, paralelo e igual. Tirando, pois, por T , HL paralelo e igual ao diâmetro EF ⁽¹⁾ — projecção do eixo maior — temos a projecção dum diâmetro da secção circular.

Para concluir a questão, precisamos de determinar um segundo diâmetro. Aquele que se impõe como o mais fácil de determinar é o que se projecta paralelamente às geratrizes e que designaremos por g . Conhecemos o seu tamanho, porque sabemos que o raio da secção circular é igual a $(S)(F)$. Tentemos efectuar o rebatimento do plano que o projecta. Tomemos para plano de rebatimento o plano de nível que contém T . Imaginemos o diâmetro de maior declive d da secção recta de centro em T . Este diâmetro pertence ao plano que se rebate e podemos determinar o seu rebatimento (d) porque sabemos que faz 30° com o plano de projecção. Construído o rebatimento (d) de d , procuremos determinar o rebatimento do diâmetro g da secção circular. Para tanto, basta que determinemos o ângulo α de g com o plano da secção recta, pro-

(1) O ponto E não se encontra apontado na figura.

Oferecem-se duas possibilidades de construir o rebatimento (g) de g . Há duas séries de planos que determinam secções circulares.

Convém determinar os pontos de contacto com o contorno do cilindro. Determinámo-los pela homologia-afim que liga as representações das secções, recta e circular. Unimos um dos pontos de contacto da secção recta ao ponto D e procurámos a correspondente da recta obtida.

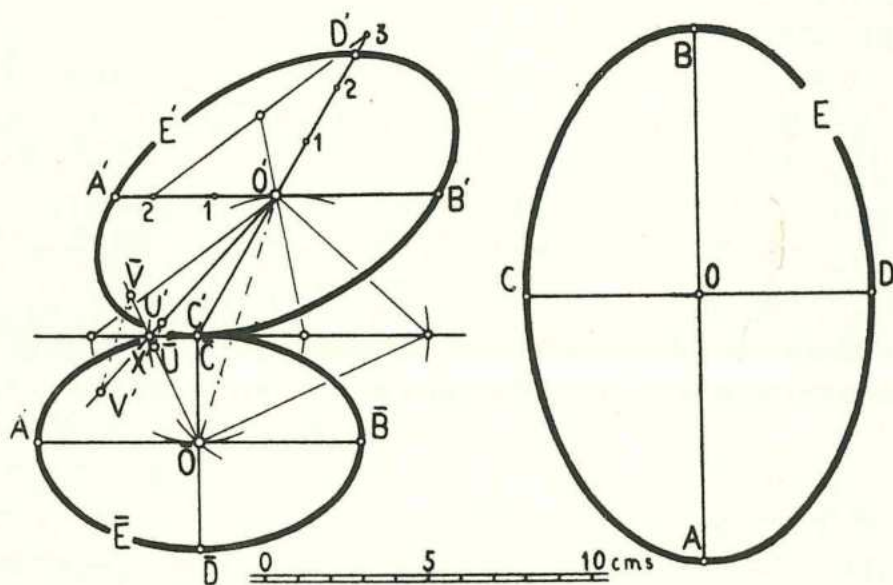


Fig. 51

XII — Fixar uma elipse E' por meio de dois diâmetros conjugados $A'B'$ e $C'D'$, sendo de 60° o ângulo que formam entre si e medindo, tanto um como o outro, 10 cms (fig. 51).

Determinar os eixos AB e CD duma elipse E que satisfaça às seguintes condições:

- a) Seja $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$;
- b) A elipse E seja capaz de se projectar ortogonalmente na elipse E' e de forma que os seus eixos AB e CD se projectem, respectivamente, nos diâmetros $A'B'$ e $C'D'$.

Res.: a) Em primeiro lugar, devemos procurar qualquer

homologia-afim que transforme a elipse E' numa elipse $\bar{E}$ com os eixos, $\bar{A}\bar{B}$ e $\bar{C}\bar{D}$, tais que $\frac{\bar{A}\bar{B}}{\bar{C}\bar{D}} = \frac{3}{2}$ e de forma que os diâmetros $A'B'$ e $C'D'$ se transformem nos eixos $\bar{A}\bar{B}$ e $\bar{C}\bar{D}$, respectivamente.

Tomámos para eixo de tal homologia a paralela a $A'B'$ tirada por C' . Designámos por O' o centro da elipse E' e procurámos o seu correspondente $\bar{O}$. Quisemos evitar a divisão em parte iguais do segmento $O'C'$, o que de facto se evitou, seguindo o seguinte caminho. Tomáram-se em $O'A'$ e $O'D'$, a partir de O' , segmentos iguais e consecutivos; dois em $O'A'$; três em $O'D'$. Transformou-se o triângulo, que se obteve, em triângulo rectângulo isósceles.

b) Em seguida, procuráram-se, pelo processo bem conhecido, as direcções perpendiculares que na homologia obtida se transformam em direcções perpendiculares.

c) Uma das direcções encontradas é a direcção de $O'X'$ (X' , ponto do eixo de homologia) e por simples inspecção da figura verifica-se que esta direcção é a direcção que representa a direcção das rectas de nível do plano da elipse E .

d) Resta determinar o verdadeiro comprimento dos eixos AB e CD da elipse E pedida. Para tanto, transportaram-se os semieixos $\bar{O}\bar{D}$ e $\bar{O}\bar{A}$ para $\bar{O}\bar{U}$ e $\bar{O}\bar{V}$ sobre $\bar{O}\bar{X}$ ($\bar{X} \equiv X'$) e procuráram-se os originais U' e V' , dos pontos $\bar{U}$ e $\bar{V}$, respectivamente. Os segmentos $O'U'$ e $O'V'$ representam os verdadeiros comprimentos dos semieixos da elipse pedida E .

XIII — *Fixar uma elipse E' por meio dos seus eixos que devem medir 11 cms e 8 cms (fig. 52).*

Determinar uma elipse E que satisfaça às seguintes condições:

- a) *Seja semelhante à elipse E' ;*
- b) *Seja capaz de se projectar ortogonalmente na elipse E' e de forma que se projectem nos eixos de E' os diâmetros da elipse E , que são, simultâneamente, conjugados e iguais.*

Res.: Devemos começar por procurar qualquer homologia-afim que realize as seguintes condições: 1.^a) a imagem da elipse E' seja uma elipse $\bar{E}$ semelhante a E ; 2.^a) as imagens dos eixos de E' sejam os diâmetros conjugados e iguais de $\bar{E}$.

Designemos por $M'N'$ e $P'Q'$ os eixos, maior e menor, respectivamente, da elipse E' ; por O' , o centro.

Para eixo de tal homologia, tomemos a paralela ao eixo maior, $M'N'$, tirada por Q' .

Manifestamente, é condição necessária e suficiente para que duas elipses sejam semelhantes, que sejam iguais os ângulos, que formam, em cada elipse, os diâmetros que são conjugados e iguais.

Procuramos, então, os diâmetros, $A'B'$ e $C'D'$, conjugados e iguais da elipse E' . Estes encontram-se manifestamente, nas diagonais do rectângulo circunscrito a E' , de lados paralelos aos eixos, $M'N'$ e $P'Q'$.

Obtém-se, agora, por consequência, o centro $\bar{O}$ (imagem do centro O'): 1.º) tirando por $Q' \equiv \bar{Q}$ a recta $\bar{Q}\bar{O}$ que faz com o

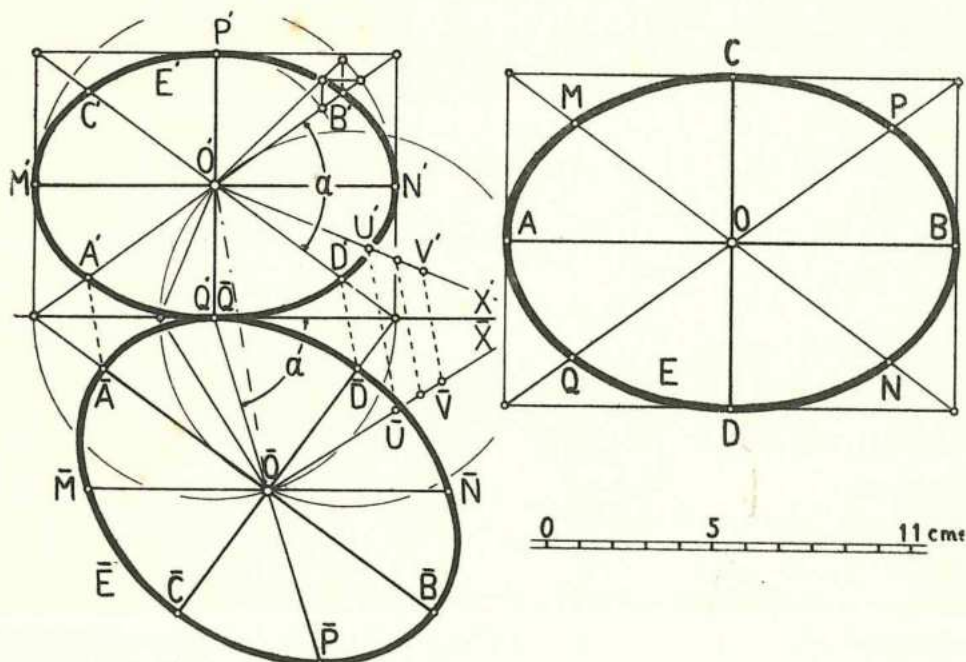


Fig. 52

eixo da homologia o ângulo α igual ao ângulo que formam os diâmetros iguais, $A'B'$ e $C'D'$; 2.º) tomando $\bar{Q}\bar{O} = O'N'$.

b) Convém, agora, determinar os eixos da elipse $\bar{E}$.

É fácil concluir que os eixos da elipse $\bar{E}$ são as imagens dos diâmetros $A'B'$ e $C'D'$. Para tanto, basta verificar que estes diâmetros se transformam em diâmetros perpendiculares. De facto, o rectângulo considerado, circunscrito à elipse E' , transforma-se num losango, e as diagonais dum losango são rectas perpendiculares.

c) Devemos, finalmente, determinar as direcções perpendiculares que na homologia se transformam em direcções, igualmente, perpendiculares. Uma destas direcções representa a direcção das rectas de nível do plano da elipse E . Determinadas as direcções, verifica-se, por simples inspecção da figura que é a direcção de $O'X'$ a que representa a direcção das rectas de nível do plano da elipse procurada E .

d) Determinam-se e determináram-se os verdadeiros comprimentos dos semieixos da elipse E , transportando os semieixos, $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$, de E , para $\overline{OU}$ e $\overline{OV}$, respectivamente, sobre $\overline{OX}$ ($X \equiv X'$) e procurando os originais U' e V' dos pontos U e V .

Exercícios

101. Desenhar um trapézio isósceles, $A'B'C'D'$, com as seguintes medidas: base maior, 10 cms; base menor e lados oblíquos, iguais a 5 cms.

Construir o trapézio rectângulo, $ABCD$, com a altura igual à base menor, que se pode projectar ortogonalmente no trapézio desenhado. *e determinar o ang. ψ que o plano de $ABCD$ faz com o de projecção.*

102. Desenhar um trapézio rectângulo, $A'B'C'D'$, com as seguintes medidas: base maior, 10 cms; base menor e altura, iguais a 6 cms.

Construir um trapézio rectângulo, $ABCD$, que satisfaça às seguintes condições:

- Seja isósceles.
- Tenha os lados oblíquos iguais à base menor.
- Seja capaz de se projectar ortogonalmente no trapézio desenhado, $A'B'C'D'$.

103. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes dimensões: base maior, igual a 10 cms; base menor e altura, iguais a 6 cms.

Construir um trapézio isósceles, com os ângulos agudos de 60° , o qual seja capaz de se projectar ortogonalmente no trapézio desenhado.

Ditar — 104. Desenhar um quadrado, $A'B'C'D'$, de 7 cms de lado. Determinar:

- O losango, de ângulos agudos iguais a 45° , capaz de se projectar ortogonalmente no quadrado desenhado.
- Os ângulos ψ que o plano do losango e o lado AB fazem com o plano de projecção.

105. Desenhar um triângulo, $A'B'C'$, cujos lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, meçam, respectivamente, 6, 7 e 8 cms.

Construir um triângulo, ABC , rectângulo em A , que se possa projectar ortogonalmente no triângulo, $A'B'C'$ e que tenha o cateto AC duplo do cateto AB .

106. Construir um rectângulo $ABCD$, cujas diagonais façam um ângulo de 60° , e que se possa projectar ortogonalmente num losango $A'B'C'D'$ com as diagonais, $A'C'$ e $B'D'$, de 6 cms e 9 cms, respectivamente.

107. Desenhar um triângulo $A'B'C'$, com as seguintes medidas: $A'B' = 8$ cms; $B'C' = 7$ cms; $C'A' = 3,5$ cms.

Determinar:

a) O lado do triângulo equilátero que se possa projectar ortogonalmente no triângulo desenhado.

b) O ângulo que o plano do triângulo equilátero forma com o plano de projecção, quando se projecta no triângulo $A'B'C'$.

108. Desenhar um trapézio rectângulo com as seguintes medidas: base maior, igual a 5 cms; base menor, igual a 3 cms; altura, igual a 4 cms.

Desenhar, em seguida, um trapézio isósceles que possa ser obtido por projecção ortogonal do trapézio desenhado sobre um plano paralelo à sua diagonal mais pequena.

109. Desenhar um trapézio rectângulo, $A'B'C'D'$, com as seguintes medidas: base maior, 6 cms; base menor, 3 cms; altura, 4 cms.

Construir um trapézio, $ABCD$, que satisfaça às condições seguintes:

a) Seja isósceles.

b) Tenha a altura igual à diferença das suas bases.

c) Possa projectar-se ortogonalmente no trapézio desenhado, $A'B'C'D'$.

Ditar — 110. Desenhar um triângulo $A'B'C'$, sendo: $B'C' = 6$ cms; $C'A' = 5$ cms; $A'B' = 2$ cms.

No lado $B'C'$, tomar o ponto D' , tal que $B'D' = 4$ cms; traçar a recta $A'D'$.

Determinar um triângulo ABC que satisfaça às seguintes condições:

a) Seja rectângulo em A .

b) Seja capaz de se projectar ortogonalmente no triângulo desenhado, $A'B'C'$, e de modo que a bissetriz do ângulo recto, em A , se projecte na recta $A'B'$.

Fazer no lugar
111. Um prisma tem para secção recta um losango de lados iguais a 6 cms e com uma das diagonais, também, igual a 6 cms :

a) Construir um quadrado que possa ser obtido como secção plana do prisma.

b) Determinar, gráficamente, o ângulo que deve fazer o plano secante com as arestas do prisma.

Fazer no lugar
112. Desenhar duas semi-rectas a' e b' , com a mesma origem V' , e que formem um ângulo de 45° . Traçar a bissectriz, c' deste ângulo.

Supondo as semi-rectas, a' , b' e c' , obtidas por projecção ortogonal de dois ângulos $\hat{a},c$ e $\hat{c},b$, complanos e adjacentes, de 30° e 60° , respectivamente, determinar os ângulos que as semi-rectas, a , b e c , formam, em tais condições, com o plano de projecção.

113. Desenhar um triângulo, $A'B'C'$, equilátero, de 8 cms de lado.

Fixar, depois, no lado $B'C'$ o ponto D' , sendo $B'D' = 3$ cms, e traçar a recta $A'D'$.

Determinar o triângulo ABC que é capaz de se projectar ortogonalmente no triângulo $A'B'C'$, nas seguintes condições :

a) O lado AB deve fazer 30° com o plano de projecção.

b) A bissectriz do ângulo em A deve projectar-se na recta $A'D'$.

c) As cotas dos vértices B e C devem exceder, uma e outra, a cota de A .

[Nota: Visto que é dada a projecção da bissectriz do ângulo em A , estamos habilitados a resolver o problema do transporte dum segmento dum dos lados, AB ou AC , para o outro. Pelo facto de podermos efectuar o transporte e de conhecermos o ângulo de AB com o plano de projecção, podemos determinar o ângulo que o lado AC faz com o plano de projecção. Conhecidos os ângulos de AB e AC com o plano de projecção, facilmente podemos construir a projecção duma recta de nível do plano de triângulo ABC .

114. Desenhar um triângulo, $O'A'B'$, equilátero, de 4 cms de lado.

Desenhar a projecção ortogonal duma pirâmide triangular regular, que satisfaça às condições seguintes :

a) A altura da pirâmide deve ser igual ao raio da circunferência circunscrita à base.

b) O centro e um dos lados da base devem projectar-se em O' e $A'B'$, respectivamente.

115. Desenhar um triângulo $A'B'O'$, sendo: $A'B' = 4$ cms; $A'O' = 3$ cms; $B'O' = 2$ cms.

Desenhar a projecção ortogonal duma pirâmide que satisfaça às seguintes condições:

- a) A pirâmide é hexagonal regular.
- b) O centro e um dos lados da base projectam-se em O' e $A'B'$, respectivamente.
- c) A altura da pirâmide é igual à aresta da base.

116. Desenhar um triângulo isósceles $A'B'V'$, sendo: $A'B' = A'V' = 5$ cms e o ângulo em A' igual a 120° .

Determinar a projecção ortogonal duma pirâmide triangular regular que satisfaça às condições seguintes:

- a) O vértice da pirâmide deve projectar-se em V' e um dos lados da base, em $A'B'$.
- b) O plano da base deve admitir o lado que se projecta em $A'B'$ como recta de maior declive.

Determinar, também, o tamanho da altura da pirâmide.

117. Desenhar um paralelogramo, $A'B'C'D'$, sendo: $A'B' = 8$ cms; $A'D' = 5$ cms; $D'\hat{A}'B' = 45^\circ$.

Desenhar a projecção ortogonal dum cubo tal que o paralelogramo desenhado seja projecção duma das suas faces.

118. Desenhar um triângulo $A'B'O'$, sendo: $A'B' = 5$ cms; $A'O' = 4$ cms; $B'O' = 2$ cms.

Desenhar um pentágono regular que seja tal que um dos seus lados se possa projectar ortogonalmente em $A'B'$ e o seu centro em O' .

119. Desenhar um triângulo $A'B'O'$, sendo: $A'B' = 5$ cms; $A'O' = 4$ cms; $B'O' = 2$ cms.

Construir a projecção ortogonal dum prisma nas condições seguintes:

- a) O prisma é pentagonal regular.
- b) Um dos lados duma das bases do prisma projecta-se no lado $A'B'$ do triângulo desenhado; o centro da mesma base, no vértice O' do mesmo triângulo.
- c) As arestas laterais do prisma são, em comprimento, iguais aos diâmetros das circunferências circunscritas às bases.

120. Desenhar um triângulo ABC , sendo: $AB = 8$ cms; $AC = 10$ cms; $BC = 7$ cms.

Construir um triângulo $A'B'C'$ que satisfaça às condições seguintes :

- a) Seja equilátero.
- b) Possa ser obtido por projecção ortogonal do triângulo ABC .

121. As arestas dum tetraedro, $ABCD$, têm os seguintes comprimentos : $AB = AD = 8$ cms ; $BC = 10$ cms ; $AC = BD = CD = 7$ cms.

- a) Construir uma projecção ortogonal do tetraedro sobre um plano paralelo à face ABC .
- b) Determinar por meio da projecção obtida o tamanho da altura relativa ao vértice D .
- c) Construir, finalmente, uma projecção ortogonal do mesmo tetraedro, tal que a projecção da face ABC seja um triângulo equilátero.

122. Um dos lados dum ângulo φ faz 30° com o plano de projecção ; o outro, 45° . O ângulo φ projecta-se ortogonalmente no plano de projecção num ângulo recto.

Determinar, gráficamente, o ângulo φ .

123. Fixar duas semi-rectas, a' e b' , com a mesma origem, V' , e que formem um ângulo recto.

No ângulo determinado pelas duas semi-rectas, a' e b' , traçar a semi-recta c' , que forma 30° com a' .

Determinar o ângulo φ que se pode projectar ortogonalmente no ângulo determinado pelas semi-rectas a' e b' , nas seguintes condições :

- a) O lado a de φ , que se projecta em a' , forma 30° com o plano de projecção.
 - b) A bissectriz c de φ projecta-se em c' .
- [Nota : Comparar com o exercício n.º 113].

124. Fixar duas semi-rectas c' e b' , perpendiculares.

Determinar o ângulo φ cujos lados, a e b , se possam projectar, ortogonalmente, em a' e b' , respectivamente, nas seguintes condições :

- a) O plano de φ faz 60° com o plano de projecção.
- b) O lado a de φ faz 30° com o plano de projecção.

[Nota : Tomando qualquer ponto T em a' e arbitrando este ponto para traço do lado a de φ , podemos determinar a cota do vértice de φ , porque conhecemos o ângulo do lado a com o plano

de projecção. Visto que conhecemos, também, o ângulo do plano de φ com o plano de projecção, determinada a cota do vértice, podemos determinar o comprimento do segmento de maior declive limitado pelo vértice e pelo traço do plano de φ . Ficámos habilitados a construir o traço do plano do ângulo φ].

125. Fixar um ângulo φ' de 120° e designar por a' e b' os seus lados e por V' , o seu vértice.

Supondo que o ângulo fixado φ' é projecção ortogonal dum ângulo recto φ , de lados a e b e vértice V , e que o lado a faz 30° com o plano de projecção.

Determinar :

a) O ângulo do lado b com o plano de projecção.

b) O ângulo do plano de φ com o plano de projecção.

[Nota 1.^a: Arbitrando um ponto T de a' para traço de a , podemos determinar a cota de V , porque conhecemos o ângulo de a com o plano de projecção. Visto que o ângulo φ é recto, o seu lado b fica no plano perpendicular em V à recta a . É fácil construir o traço deste plano, donde, depois, o traço de b e o traço do plano do ângulo φ].

Nota 2.^a: Se o ângulo φ não fosse recto, o problema complicava-se, porque, em vez do plano perpendicular em V à recta a , teríamos de considerar um cone de revolução.

126. Desenhar um pentágono regular, $A'B'C'D'E'$ inscrito numa circunferência de 5 cms de raio.

Construir um pentágono, $ABCDE$, que realize as condições seguintes :

a) O ângulo em A deve ser recto.

b) O ângulo em B deve ser de 150° ($150 = 180 - 30$).

c) O pentágono $ABCDE$ deve ser capaz de se projectar ortogonalmente no pentágono desenhado, $A'B'C'D'E'$.

127. Desenhar um pentágono regular, $ABCDE$, inscrito numa circunferência de 5 cms de raio.

Construir um pentágono, $A'B'C'D'E'$, que realize as condições seguintes :

a) O ângulo em A' deve ser recto.

b) O ângulo em B' deve ser de 150° ($150 = 180 - 30$).

c) O pentágono $A'B'C'D'E'$ deve poder ser obtido por projecção ortogonal do pentágono desenhado $ABCDE$.

128. Desenhar um quadrado $A'B'C'D'$, de 6 cms de lado. No lado $C'D'$ tomar o ponto X' , sendo $C'X' = 4,5$ cms.

Traçar a recta $A'X'$ e designá-la por a' . Traçar, também, as paralelas a a' , tiradas por B' , C' e D' , e designá-las por b' , c' e d' , respectivamente.

Considerar o quadrado desenhado, $A'B'C'D'$, como projecção ortogonal dum rectângulo $ABCD$, tal que $\frac{AB}{AD} = \frac{2}{3}$.

Considerar, também, as rectas a , b , c e d , assim definidas:

a) Passam pelos vértices A , B , C e D do rectângulo $ABCD$.

b) São paralelas ao plano de projecção.

c) Projectam-se nas rectas a' , b' , c' e d' , respectivamente.

Considerar, finalmente, a superfície prismática quadrangular, que tem para secção plana o rectângulo $ABCD$ e para as arestas as rectas a , b , c e d .

Determinar:

a) O verdadeiro tamanho duma secção recta, $A_0B_0C_0D_0$, da superfície prismática considerada.

b) Efectuar, também, na superfície prismática, uma secção plana que seja um quadrado, $A_1B_1C_1D_1$, e determinar a sua representação, $A'_1B'_1C'_1D'_1$, e o seu verdadeiro tamanho.

129. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar o ponto X , sendo $CX = 6$ cms, e traçar a recta AX .

Considerar o tronco do prisma quadrangular, assim definido:

a) Uma das suas bases é o quadrado desenhado $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se, ortogonalmente, sobre o mesmo plano, em rectas paralelas à recta AX .

c) O plano da segunda base, $A_0B_0C_0D_0$, é perpendicular às arestas laterais do tronco.

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Representar o tronco de prisma considerado em projecção ortogonal feita sobre um plano paralelo às arestas laterais do tronco e paralelo, também, à diagonal BD da face, quadrada, $ABCD$.

130. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar o ponto X , sendo $CX = 6$ cms e traçar a recta AX .

Considerar o tronco de prisma quadrangular assim definido:

a) Uma das suas faces é o quadrado desenhado, $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se, ortogonalmente, sobre o mesmo plano, em rectas paralelas à recta AX .

c) O plano da segunda base, $A_0B_0C_0D_0$, é perpendicular às arestas laterais do tronco.

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Representar o tronco de prisma considerado em projecção ortogonal feita sobre um plano paralelo ao plano da base $ABCD$.

131. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar os pontos X e Y , sendo $CX=6$ cms e $CY=2$ cms, e traçar as rectas AX e AY .

Considerar o tronco de prisma quadrangular, assim definido:

a) Uma das bases é o quadrado desenhado, $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se, ortogonalmente, sobre o mesmo plano em rectas paralelas à recta AX .

c) O plano da segunda base, $A_0B_0C_0D_0$, é perpendicular às arestas laterais do tronco.

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Representar o tronco de prisma considerado, em projecção ortogonal, nas condições seguintes:

a) O plano de projecção é paralelo à recta AY , que foi traçada no plano da base $ABCD$.

b) O plano de projecção forma 45° com o plano da base $ABCD$.

132. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar o ponto X , sendo $CX=6$ cms, e desenhar a recta AX .

Considerar o tronco de prisma quadrangular assim definido:

a) Uma das bases é o quadrado desenhado $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se, ortogonalmente, no mesmo plano, em rectas paralelas à recta AX .

c) O plano da segunda base, $A_0B_0C_0D_0$, é perpendicular às arestas laterais do tronco.

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Construir uma representação em projecção ortogonal do tronco de prisma quadrangular considerado, a qual realize as seguintes condições:

a) Sejam de 45° os ângulos que representam os ângulos em A e B , respectivamente, da base $ABCD$.

b) Seja de 45° , igualmente, o ângulo que representa o ângulo das diagonais da mesma base $ABCD$.

133. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar o ponto X , sendo $CX = 6$ cms, e traçar a recta AX .

Considerar o tronco de prisma quadrangular, assim definido:

a) Uma das bases é o quadrado desenhado $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se, ortogonalmente, no mesmo plano, em rectas paralelas à recta AX .

c) O plano da segunda base, $A_0B_0C_0D_0$, é perpendicular às arestas laterais do tronco.

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Construir uma representação em projecção ortogonal do tronco de prisma considerado, a qual realize as seguintes condições:

a) Seja de 45° o ângulo de AB com o plano de projecção:

b) Seja de 150° ($150 = 180 - 30$) o ângulo que representa o ângulo recto em A .

134. Desenhar um quadrado $ABCD$, de 8 cms de lado.

No lado CD tomar o ponto X , sendo $CX = 6$ cms.

Considerar o tronco de prisma quadrangular, assim definido:

a) Uma das bases é o quadrado desenhado $ABCD$.

b) As arestas fazem 60° com o plano da base $ABCD$ e projectam-se ortogonalmente, no mesmo plano, em rectas paralelas a AX .

c) A segunda base é um paralelogramo $A_0B_0C_0D_0$, com os ângulos em A_0 e C_0 de 45° e sendo, igualmente, de 45° o ângulo agudo das suas diagonais, A_0C_0 e B_0D_0 .

d) A aresta AA_0 tem de comprimento 10 cms.

Representar o tronco de prisma quadrangular considerado em projecção ortogonal feita sobre um plano paralelo ao plano da base $ABCD$.

135. Fixar uma elipse E por meio dos seus eixos que devem medir 11 cms e 8 cms.

Determinar uma elipse E' que satisfaça às seguintes condições:

a) Seja semelhante à elipse E .

b) Seja capaz de poder ser obtida por projecção ortogonal da elipse E e de forma que os diâmetros de E , que são simultaneamente conjugados e iguais, se projectem nos eixos de E' .

136. Fixar uma elipse E por meio de dois diâmetros conjugados, AB e CD , sendo de 60° o ângulo que formam entre si e medindo, tanto um como o outro, 10 cms.

Determinar os eixos, $A'B'$ e $C'D'$ duma elipse E' que satisfaça às seguintes condições:

a) Seja $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{2}$.

b) Seja a elipse E' capaz de poder ser obtida por projecção ortogonal da elipse E e de forma que os diâmetros, AB e CD , da elipse E se projectem nos eixos $A'B'$ e $C'D'$ do elipse E' .

137. Fixar uma elipse E' por meio dos seus eixos que devem medir 11 cms e 8 cms.

Determinar:

a) Os diâmetros $A'B'$ e $C'D'$ da elipse E' , que são iguais e conjugados um do outro.

b) Os eixos duma elipse E que satisfaça às condições seguintes:

1.^a) A elipse E seja tal que formem 45° os seus diâmetros, AB e CD , que são, simultâneamente, conjugados e iguais.

2.^a) A elipse E seja capaz de se projectar ortogonalmente na elipse E' e de forma que os diâmetros AB e CD de E se projectem nos diâmetros $A'B'$ e $C'D'$ de E' .

138. Fixar uma elipse E' pelos seus eixos que devem medir 11 cms e 6 cms.

Determinar:

a) Os diâmetros, $A'B'$ e $C'D'$, da elipse E' , que são iguais e conjugados um do outro.

b) Os eixos duma elipse E que satisfaça às condições seguintes:

1.^a) Admita dois diâmetros, AB e CD , que sejam iguais, conjugados um do outro, e formem 75° ($75 = 45 + 30$), um com o outro.

2.^a) A elipse E seja capaz de projectar ortogonalmente na elipse E' e de forma que os diâmetros AB e CD se projectem nos diâmetros $A'B'$ e $C'D'$, respectivamente.

139. Fixar uma elipse E por meio dos seus eixos, AB e CD , que devem medir 11 cms e 8 cms, respectivamente.

Determinar a elipse E' em que se projecta, ortogonalmente, a elipse E desenhada, nas seguintes condições:

a) Os eixos de E , AB e CD , devem projectar-se em diâmetros de E , que formem, um com o outro, 60° .

b) O eixo AB deve formar 30° com o plano de projecção.

140. Considerar o tronco de cilindro, assim definido:

a) Uma das bases é um círculo de 5 cms de raio.

b) As geratrizes fazem 60° com o plano da mesma base.

c) A segunda base é uma elipse cujos eixos estão na razão 2:3.

d) A distância dos centros das duas bases é igual a 10 cms.

Construir a representação do tronco do cilindro considerado, em projecção ortogonal feita sobre um plano paralelo ao plano da base circular.

CAPÍTULO III

AXONOMETRIA

Axonometria — é um ramo de *geometria descritiva* cuja finalidade consiste em tratar e resolver problemas de *projecção* por meio de *eixos coordenados* e de *coordenadas*.

Em axonometria pròpriamente dita, o sistema xyz de eixos considerado é ortogonal; quer dizer, os eixos são, dois a dois, perpendiculares.

É facto que, em geral, tanto em geometria pròpriamente dita, como nas aplicações, as figuras que se consideram admitem certas projecções de fácil construção; mas, frequentemente, não são semelhantes projecções as que satisfazem aos requisitos exigidos pela natureza e índole das questões tratadas.

O problema de construir projecções com determinadas características constitui, realmente, problema importante e fundamental.

Ora, precisamente, é fundamento e essência da *axonometria* fornecer métodos gerais para resolver tal problema: *construir projecções que satisfaçam a certos requisitos, a partir de projecções antecipadamente obtidas*.

Daqui, o grande mérito da *axonometria*.

Conforme a natureza da projecção considerada, ortogonal, paralela ou central, assim, também, a *axonometria* se diz ortogonal, paralela ou central.

No presente capítulo, apenas tratamos de *axonometria ortogonal* e de *axonometria paralela*.

A *axonometria central* não oferece, realmente, interesse especial.

Axonometria ortogonal

Proposição fundamental:

Uma projecção ortogonal $x'y'z'$ dum sistema xyz de eixos ortogonais determina a posição do sistema no espaço; à parte, porém, de deslocamentos por translação normais ao plano de projecção.

Afirma-se, portanto, que, dada uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, ficam determinados os ângulos que os eixos e planos coordenados formam com o plano de projecção.

Há a considerar, contudo, uma excepção: é o caso em que um dos eixos do sistema é paralelo ao plano de projecção e nenhum dos outros dois projectante. Em semelhante caso, pela projecção, não fica determinado o ângulo que forma com o plano de projecção qualquer dos dois eixos que lhe não são paralelos. Pode fixar-se, arbitrariamente, um destes ângulos; o outro fica, consequentemente, determinado.

Pelo facto, mesmo, de, pela projecção, ficar determinada, a posição do sistema, a partir da projecção, se podem propor, tratar e resolver os problemas geométricos que tenhamos de considerar.

Projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais:

a) Se um dos eixos for projectante, a sua projecção reduz-se a um ponto, que se sobrepõe à projecção da origem do sistema; as projecções dos outros dois eixos são rectas perpendiculares.

b) Se um dos eixos for paralelo ao plano de projecção e nenhum dos outros dois projectante, as projecções destes sobrepõem-se numa mesma recta; esta é perpendicular à projecção do eixo paralelo ao plano de projecção.

c) Se nenhum dos eixos for paralelo ao plano de projecção, então, duas quaisquer das projecções dos eixos não são perpendiculares; e, em virtude dum princípio já estabelecido no capítulo anterior, qualquer das projecções fica contida, necessariamente, na região angular obtusa (não na região angular aguda) determinada pelas outras duas.

O caso b) constitui o caso de excepção, já referido, em que a posição do sistema não fica determinada pela projecção considerada. Para determinar-se a posição do sistema, pode dar-se, como se disse, o ângulo que deve formar com o plano de projecção um dos eixos não paralelos a este plano.

Rectas de nível

Num sistema de eixos ortogonais, qualquer dos eixos é perpendicular ao plano determinado pelos outros dois.

Por consequência:

Visto que, em projecção ortogonal, as projecções das rectas de nível dum plano são perpendiculares às projecções das rectas perpendiculares ao plano, dada uma projecção ortogonal dum sistema

de eixos ortogonais, ficam determinadas as direcções das projecções das rectas de nível dos planos coordenados.

Pelo facto mesmo de serem conhecidas as representações das rectas de nível, podem-se propor e serem tratados, como se viu no capítulo antecedente, problemas de *forma*, *grandeza* e *posição* das figuras consideradas. Este resultado implica que, como foi, também, afirmado, *a projecção determina a posição do sistema*.

Triângulo axonométrico:

Um triângulo cujos vértices fiquem nos eixos coordenados (um em cada eixo) diz-se *axonométrico* quando o seu plano for paralelo ao plano de projecção.

Um *triângulo axonométrico* tem para projecção um triângulo que tem para *alturas* as projecções dos eixos.

Reciprocamente: Um triângulo, que tenha para alturas as projecções dos eixos, pode considerar-se como imagem dum *triângulo axonométrico*.

Como, evidentemente, qualquer plano de nível se pode considerar como plano de projecção, sempre se pode considerar que a representação dum triângulo axonométrico se sobrepõe ao próprio triângulo representado. Na representação dum triângulo axonométrico podemos usar letras acentuadas ou não acentuadas.

Nota: Um triângulo que tenha para vértices pontos dos eixos dum sistema ortogonal (um vértice em cada eixo) é, necessariamente, acutângulo. Dada uma projecção *paralela* dum sistema de eixos ortogonais com a projecção dum triângulo axonométrico (necessariamente, um triângulo acutângulo), a projecção considerada é ou não ortogonal, conforme a projecção da origem do sistema fique ou não fique no ponto de cruzamento das alturas do triângulo.

Ângulos de declive:

Por *ângulos de declive* entendemos os ângulos dos eixos coordenados com o plano de projecção.

Empregamos as letras α , β e γ para designar os ângulos de declive; do eixo dos x , dos y , dos z , respectivamente.

Os ângulos de declive não são independentes. Estão ligados entre si pelas relações equivalentes:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1 \text{ (a relação em senos)}$$

$$\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \gamma = 2 \text{ (a relação em cosenos)}$$

Quando sejam iguais os três ângulos de declive, a projecção

diz-se *isométrica*; quando sejam iguais dois dos ângulos de declive, *monodimétrica*; quando sejam todos diferentes, *anisométrica*.

Inclinação e rotação:

O ângulo de declive γ do eixo dos z , diz-se, também, *inclinação* do sistema. A inclinação do sistema é nula quando o eixo dos z for paralelo ao plano de projecção.

Um sistema diz-se sem *rotação* ou que a *rotação* é nula, quando o plano xz for projectante.

Quando o plano xz não for projectante, diz-se que há *rotação* do sistema e esta é dada pelo ângulo que o plano xz forma com o plano projectante do eixo dos z .

A *rotação* representa-se pela letra ρ .

No caso do eixo dos z ser projectante — $\gamma = 90^\circ$ — a *rotação* é indeterminada e não poderemos falar em *rotação*.

Rotação e *inclinação* são independentes. Definem a posição do sistema. São parâmetros convenientes para determinarem a posição do sistema relativamente ao plano de projecção.

Circunferência de redução:

Tem importância especial para a axonometria o teorema seguinte:

Teorema: — A linha de intersecção duma esfera com um cone de revolução, de eixo tangente à esfera, projecta-se ortogonalmente numa circunferência sobre qualquer plano normal ao eixo do cone.

A circunferência é tangente ao contorno da esfera.

Sendo φ o ângulo das geratrizes com o eixo do cone e R , o raio da esfera, o raio r da circunferência é $r = R \sin^2 \varphi$.

A circunferência diz-se a *circunferência de redução* das cordas da esfera que ficam nas geratrizes do cone.

Comprimentos reduzidos dos eixos:

Realmente, um sistema de eixos, para se considerar determinado, implica que seja fixada uma unidade de comprimento, a mesma para cada um dos eixos, na concepção ordinária da teoria.

Os pontos dos eixos, que ficam à unidade de comprimento da origem e no sentido positivo, podem, naturalmente, dizerem-se os extremos dos eixos.

Designamos correntemente, por L , M e N os extremos dos eixos, respectivamente, do eixo dos x , dos y e dos z .

A unidade de comprimento — $OL = OM = ON$ — dir-se-á o

verdadeiro comprimento dos eixos e será designado pela letra u .

Os comprimentos das projecções $O'L'$, $O'M'$ e $O'N'$ dir-se-ão os *comprimentos reduzidos* dos eixos e serão designados pelas letras l , m e n , respectivamente.

Resulta :

$$l = u \cos \alpha, m = u \cos \beta, n = u \cos \gamma$$

Donde :

$$l^2 + m^2 + n^2 = u^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Portanto :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2u^2$$

Triângulo de redução:

Os comprimentos reduzidos não podem ser arbitrariamente fixados.

De facto: Por se tratar de projecção ortogonal, $l, m, n \leq u$.

Portanto :

$$\begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &\geq 2l^2 \\ l^2 + m^2 + n^2 &\geq 2m^2 \\ l^2 + m^2 + n^2 &\geq 2n^2 \end{aligned}$$

Donde :

$$\begin{aligned} l^2 &\leq m^2 + n^2 \\ m^2 &\leq n^2 + l^2 \\ n^2 &\leq l^2 + m^2 \end{aligned}$$

O sinal $=$ apenas se pode apresentar se houver um ou dois eixos paralelos ao plano de projecção. Excluindo esta hipótese, verificar-se-ão as relações,

$$l^2 < m^2 + n^2; m^2 < n^2 + l^2; n^2 < l^2 + m^2,$$

as quais exprimem que é possível construir um triângulo cujos lados sejam os quadrados dos comprimentos reduzidos.

Tal triângulo ou um triângulo semelhante diz-se, *triângulo de redução*.

Demonstra-se que os ângulos dum triângulo de redução se relacionam com os ângulos que formam as projecções dos eixos, do seguinte modo :

Representaremos os vértices dum triângulo de redução pelas letras P , Q e R de modo que se tenha

$$\frac{QR}{l^2} = \frac{RP}{m^2} = \frac{PQ}{m^2}$$

Representaremos pelas letras ξ , η e ζ os ângulos obtusos que formam as projecções dos eixos, respectivamente, $\widehat{y', z'}$; $\widehat{z', x'}$; $\widehat{x', y'}$.
Nestas condições

$$\hat{P} = 2 \left(\xi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\hat{Q} = 2 \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\hat{R} = 2 \left(\zeta - \frac{\pi}{2} \right)$$

Axonometria construtiva:

Se o problema fundamental da axonometria é o de construir projecções, que satisfaçam a determinados requisitos, a partir de projecções antecipadamente obtidas, não deixa, também, de ter importância que se considerem e se tratem problemas directos de construção, que muitas vezes, mesmo, se impõem.

Para se construir, é preciso que se tenham inteiramente determinados os elementos da construção e se possuam meios de individualização dos elementos pedidos.

Representação do ponto:

Um ponto não fica determinado pela sua projecção. Para determinar um ponto, além da projecção, deve ser dado um 2.º elemento.

Em representação normal, um ponto é representado pela sua projecção e pela projecção da sua planta; por *planta*, entendendo-se a projecção ortogonal do ponto sobre o plano xy .

A recta, que une a projecção A' do ponto à projecção A'_p da sua planta, é paralela à projecção z' do eixo dos z .

Representação da recta:

A projecção duma recta não determina, também, a recta. Para determinar uma recta é preciso dar, além da sua projecção, mais um novo elemento.

Em representação normal, uma recta é representada pela sua projecção a' e a projecção a'_p da sua planta; por planta, entendendo-se a projecção ortogonal da recta sobre o plano xy .

Representação do plano:

Em representação normal, um plano representa-se pelos seus traços sobre os planos coordenados.

Exercícios resolvidos:

I — Fixar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = 120^\circ$ e $\eta = 105^\circ$ (fig. 53).

Determinar os ângulos de declive, α , β e γ , e a rotação, ρ , do sistema.

Res.: Começemos por construir um triângulo axonométrico XYZ (X em x' , Y em y' , Z em z' , $XY \perp z'$, $YZ \perp x'$, $ZX \perp y'$).

O plano do triângulo construído pode ser tomado para plano de projecção.

Um ângulo de declive pode ser obtido rebatendo o plano projectante do eixo a que o ângulo diz respeito; mas, obtido um ângulo de declive, a determinação dos dois restantes torna-se problema fácil, de resolução, por assim dizer, imediata.

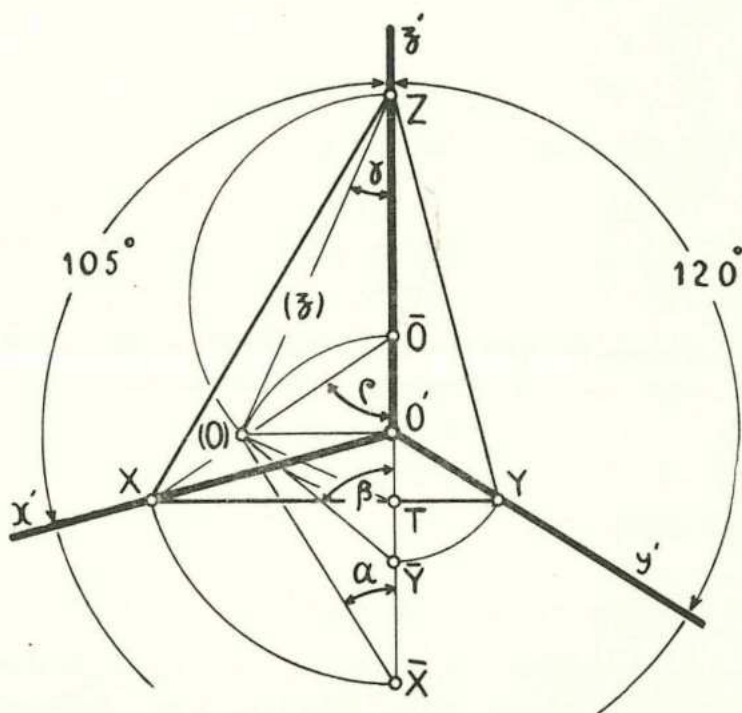


Fig. 53

Determinação

de γ : — Começemos, naturalmente, por determinar o ângulo γ de declive do eixo dos z . Para tanto, vamos rebater o plano projectante do eixo dos z .

Designando por T o ponto de intersecção do plano projectante do eixo dos z com a recta XY , a recta ZT é o eixo do rebatimento a efectuar. A recta OT , que une a origem O do sistema ao ponto T pertence ao plano xy e, por consequência, o ângulo $Z\hat{O}T$ é recto.

Por ser recto ângulo $Z\hat{O}T$, o rebatimento (O) da origem cai na circunferência do diâmetro ZT .

Designando por O' a projecção da origem, para obter o rebatimento (O) da origem, bastará, portanto, tirar em O' a perpendicular a ZT e determinar um dos pontos de intersecção desta perpendicular com a circunferência de diâmetro ZT .

O eixo dos z rebate-se na recta $(O)Z$.

O ângulo γ procurado rebate-se no ângulo $(O)\hat{Z}O'$.

Determinação de α : — O triângulo XOO' é retângulo em O' . Conhecem-se os catetos. O cateto $O'X$ está no plano de projecção; o cateto $O'O$ está rebatido em $O'(O)$. Pode construir-se o triângulo e, assim, determinar α .

Na figura, transportou-se $O'X$ para $O'\bar{X}$, sobre z' , e uniu-se $\bar{X}$ a (O) . O ângulo procurado é igual ao ângulo $(O)\hat{X}O'$.

Determinação de β : — O triângulo YOO' é rectângulo em O' . Conhecem-se os catetos. O cateto $O'Y$ está no plano de projecção; o cateto $O'O$ está rebatido em $O'(O)$. Pode construir-se o triângulo e, assim, determinar β .

Na figura, transportou-se $O'Y$ para $O'\bar{Y}$ sobre z' , e uniu-se $\bar{Y}$ a (O) .

O ângulo β procurado é igual ao ângulo $(O)\hat{Y}O'$.

Determinação da rotação φ : — Como o plano xy é perpendicular ao eixo dos z , o ângulo $X\hat{O}T$ representa uma *secção recta* do diedro que exprime a rotação do sistema.

Estamos, por consequência, reduzidos a determinar o valor do ângulo $X\hat{O}T$. Ora, o triângulo XOT é rectângulo em T e conhecem-se os seus catetos. O cateto XT está no plano de projecção; o cateto OT está rebatido em $(O)T$. Pode construir-se o triângulo e, assim, determinar o ângulo φ .

Na figura, transportou-se $T(O)$ para $T\bar{O}$, sobre z' , e uniu-se $\bar{O}$ a X .

O ângulo $X\hat{O}T$ dá-nos a rotação do sistema.

Nota: — Com a determinação de $\bar{O}$, temos, também, efectuado o rebatimento do plano xy . O ponto $\bar{O}$ representa, precisamente, a posição que vem tomar a origem do sistema quando se efectua o rebatimento do plano xy .

II — *Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo dados $\gamma = 30^\circ$ e $\varphi = 45^\circ$ (fig. 54).*

Res.: Começamos por fixar a projecção z' do eixo dos z e o traço Z deste eixo (arbitrariamente).

Visto que conhecemos γ , podemos construir o rebatimento

tir das suas coordenadas. A construção da *escala de redução* tem, por isso, essencial importância. Fundamentalmente, reduz-se à determinação dos comprimentos reduzidos, l , m e n .

No problema da determinação dos comprimentos reduzidos representa papel especial a teoria da *circunferência de redução*.

Começemos por fixar (arbitrariamente) em x' um ponto X . Tiremos, depois por X a perpendicular XY a z' e designemos por Y o ponto de intersecção desta perpendicular com y' .

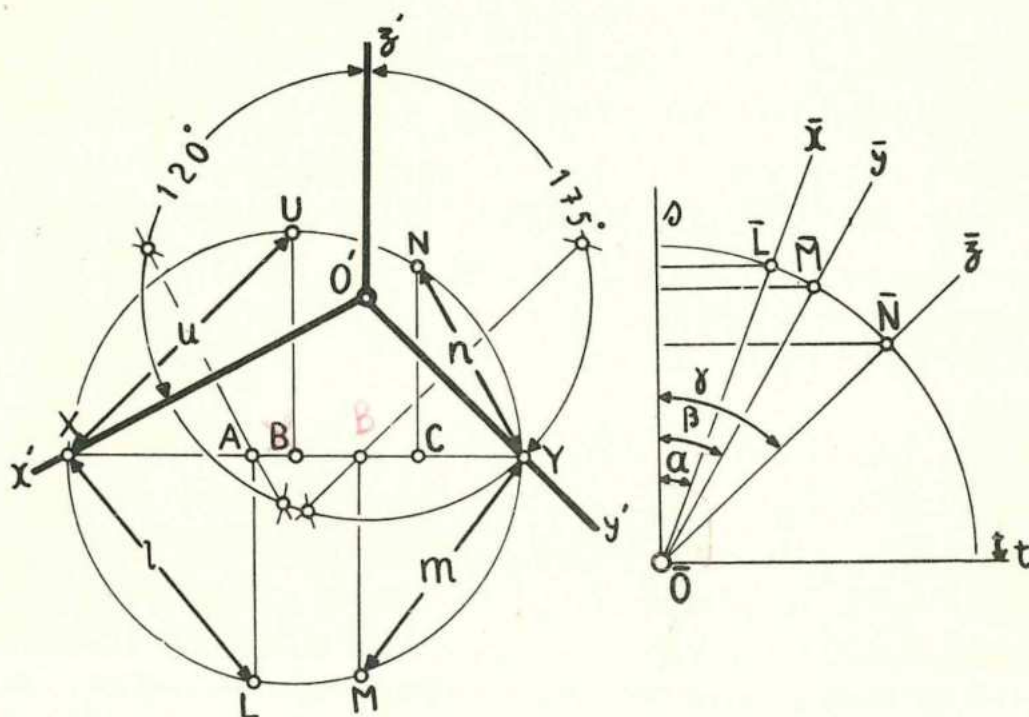


Fig. 55

À recta XY pode considerar-se como o traço do plano xy no plano de projecção.

Consideremos a esfera, que tem XY para diâmetro, e o cone de revolução, que tem para eixo a perpendicular em X ao plano de projecção e para geratriz o eixo dos x .

Podemos determinar e determinaremos o centro A da circunferência de redução correspondente ao cone e à esfera. De facto, o centro A fica na recta XY . Por outro lado, a circunferência de redução passa por X e por O' e, assim, A fica, também, na perpendicular ao meio de XO' .

Determinado A e designando, como usualmente se faz, por α o ângulo de declive do eixo dos x , temos :

$$\overline{XA} = \frac{\overline{XY}}{2} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\overline{XY}}{2} \cdot \frac{l^2}{u^2}$$

Donde :

$$l^2 = \frac{2u^2 \cdot \overline{XA}}{\overline{XY}}.$$

Arbitremos para u um valor tal que se tenha : $2u^2 = \overline{XY}^2$, ou seja $u^2 = \frac{\overline{XY}}{2} \cdot \overline{XY}$, isto é, a meia proporcional entre $\frac{\overline{XY}}{2}$ e $\overline{XY}$.

Temos, então :

$$l^2 = \overline{XA} \cdot \overline{XY}.$$

Portanto, l torna-se na meia proporcional entre $\overline{XA}$ e $\overline{XY}$.

Para determinarmos as meias proporcionais consideradas, é conveniente traçar a circunferência que tem para diâmetro $\overline{XY}$. Esta circunferência representa, também, o contorno da esfera considerada.

Sendo U um dos extremos do diâmetro perpendicular a XY , a corda $\overline{XU}$ é a meia proporcional entre $\frac{\overline{XY}}{2}$ e $\overline{XY}$; portanto : $u = \overline{XU}$.

Sendo L um dos extremos da corda perpendicular em A a XY , a corda $\overline{XL}$ é a meia proporcional entre $\overline{XA}$ e $\overline{XY}$; daí, $l = \overline{XL}$.

O comprimento reduzido m do eixo dos y obtém-se por processo análogo :

- 1.º) traçando a perpendicular ao meio de YO' ;
- 2.º) determinando o ponto B de intersecção da perpendicular com XY ;

- 3.º) levantando em B a perpendicular a XY e determinando um dos pontos M de intersecção com a circunferência de diâmetro $\overline{XY}$.

O comprimento reduzido m do eixo dos y é igual à corda $\overline{YM}$.

O comprimento n do eixo dos z pode, agora, obter-se pela relação : $l^2 + m^2 + n^2 = 2u^2$.

Resulta :

$$\begin{aligned} n^2 &= 2u^2 - l^2 - m^2 = \overline{XY}^2 - \overline{XA} \cdot \overline{XY} - \overline{YB} \cdot \overline{XY} = \\ &= \overline{XY} (\overline{XY} - \overline{XA} - \overline{YB}) = \overline{XY} \cdot \overline{AB}. \end{aligned}$$

Portanto : n é a meia proporcional entre $\overline{XY}$ e $\overline{AB}$.

Na figura, o valor de n foi, também, determinado pela circunferência traçada, de diâmetro $\overline{XY}$. Transportou-se $\overline{AB}$ para $\overline{YC}$; levan-

tou-se em C a perpendicular CN a XY e determinou-se um dos pontos de intersecção N da perpendicular com a circunferência.

O comprimento reduzido n do eixo dos z é igual à corda $\overline{YN}$.

A escala de redução constroi-se, agora, do seguinte modo:

1.º) Traçam-se duas rectas s e t perpendiculares, designando por $\overline{O}$ o ponto de intersecção.

2.º) De centro em $\overline{O}$ e raio igual ao verdadeiro comprimento u dos eixos — unidade de comprimento —, traça-se um quadrante de circunferência, compreendido entre s e t .

3.º) Traçam-se as paralelas a t às distâncias, l , m e n e determinam-se os pontos $\overline{L}$, $\overline{M}$ e $\overline{N}$ de intersecção com o quadrante de circunferência traçado, respectivamente.

4.º) Finalmente, traçam-se as rectas que unem os pontos $\overline{L}$, $\overline{M}$ e $\overline{N}$ a $\overline{O}$ e designam-se por $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ as rectas obtidas, respectivamente.

Resulta da construção que os ângulos, que as rectas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ formam com s , são iguais aos ângulos de declive, α , β e γ dos eixos x , y e z , respectivamente.

Desta fôrma, para se obter o valor reduzido duma coordenada, bastará marcá-la, a partir de $\overline{O}$, na recta correspondente, $\overline{x}$, $\overline{y}$ ou $\overline{z}$, e determinar, praticamente a compasso, a distância do ponto obtido à recta t .

IV — *Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo dados, $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 22,5^\circ$ (fig. 56).*

Res.: Uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais fica determinada dando dois quaisquer dos sete ângulos: α , β , γ ; ξ , η , ζ ; ρ .

No caso de serem dados dois dos ângulos, ξ , η , ζ , o problema é trivial.

Considerámos, também, já, o caso de serem dados os ângulos γ e ρ (exercício II).

Vamos, agora, considerar o caso de serem dados dois dos ângulos: α , β e γ .

Em exercícios subsequentes trataremos os restantes casos.

No caso presente são dados $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 22,5^\circ$.

Pelo facto de serem dados os ângulos α e β , lembra pensar nos comprimentos reduzidos, l e m , dos eixos, x e y .

O problema pode, realmente, ser resolvido pela teoria desenvolvida a propósito do exercício antecedente.

Seguindo a teoria e a notação do exercício antecedente, comecemos por fixar (arbitrariamente) o segmento XY que une os traços, X e Y , dos eixos, x e y , respectivamente.

Desenhemos a circunferência de diâmetro XY e determinemos o verdadeiro comprimento, $u = YU$, dos eixos.

Podemos, agora, determinar os comprimentos reduzidos, correspondentes, l e m , dos eixos, x e y .

Determinação de l : — Tracemos a recta XD que forma 30° com XY . [Na figura, a recta XD foi construída tomando o ponto D sobre a circunferência de diâmetro XY , sendo de 60° o arco $\widehat{YD}$]. Transportou-se, em seguida, $\overline{XU}$ para $\overline{XE}$, sobre a recta XD . De E , baixou-se a perpendicular EF a XY e determinou-se o pé F desta perpendicular.

Temos, então, $l = \overline{XF}$.

Determinado l , determinamos, a seguir, L e, depois, A .

Determinação de m : — De modo análogo, determina-se m e, depois, os pontos M e B .

Traçou-se a recta YG que forma $22,5^\circ$ com XY . [Construiu-se YG , tomando G sobre a circunferência de diâmetro XY , de modo que o arco $\widehat{XG}$ meça 45°]. Transportou-se, em seguida, $\overline{YU}$ para $\overline{YH}$, sobre a recta YG . De H , baixou-se a perpendicular HI a XY e determinou-se o pé I desta perpendicular.

Temos $m = \overline{YI}$.

Determinado m , determinamos a seguir, M e, depois, B .

Determinados os pontos A e B , obtém-se a projecção O' da origem, desenhando as circunferências de centros nesses pontos e raios $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$, respectivamente; O' é um dos pontos de intersecção destas circunferências.

Unindo O' a X , obtém-se a projecção x' do eixo dos x ; unindo O' a Y , obtém-se a projecção y' do eixo dos y ; a projecção

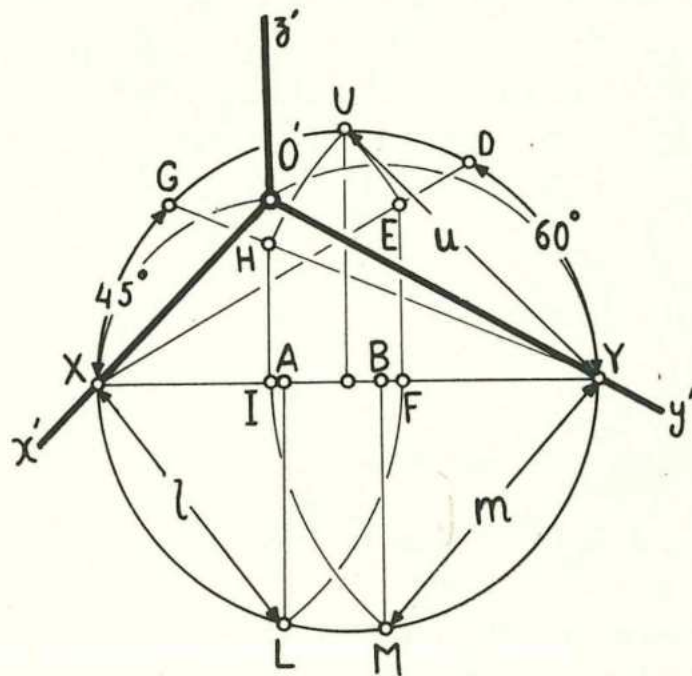


Fig. 56

z' do eixo dos z obtém-se traçando a perpendicular a XY que passa por O' .

V — *Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo dados $\gamma = 30^\circ$ e $\xi = 120^\circ$ (fig. 57).*

Res.: Começemos por fixar a projecção z' do eixo dos z e, depois, em z' , a projecção O' da origem do sistema.

Para auxiliar a construção dos ângulos dados, de 30° e 120° , convém desenhar uma circunferência de centro em O' .

A construção da projecção y' do eixo dos y é imediata.

A projecção x' do eixo dos x pode obter-se do modo seguinte:

1.º) Começemos por fixar o traço Z do eixo dos z . Na figura o traço Z foi fixado sobre a circunferência desenhada, de centro em O' .

2.º) Fixado Z , constroi-se, depois, o rebatimento (z) do eixo dos z . O rebatimento (z) obtém-se tirando por Z uma recta que forme 30° com z' .

3.º) Traçado o rebatimento (z) do eixo

dos z , obtém-se o rebatimento (O) da origem tirando em O' a perpendicular $O'(O)$, em O' , a z' , e determinando a intersecção (O) com (z) .

4.º) Tira-se, em (O) , a perpendicular $(O)T$ a (z) e determina-se o ponto T de intersecção desta perpendicular com z' . O ponto T é um ponto do traço do plano xy .

5.º) Tirando em T a perpendicular XTY a z' , obtém-se o traço do plano xy no plano de projecção.

6.º) Determinando a intersecção Y do traço XTY com a projecção y' ; obtém-se o traço do eixo dos y .

7.º) A recta ZY representa o traço do plano yz no plano de projecção e, por consequência, a projecção x' do eixo dos x é a perpendicular a ZY tirada por O' .

Nota: — Manifestamente, o caso de serem dados os ângulos

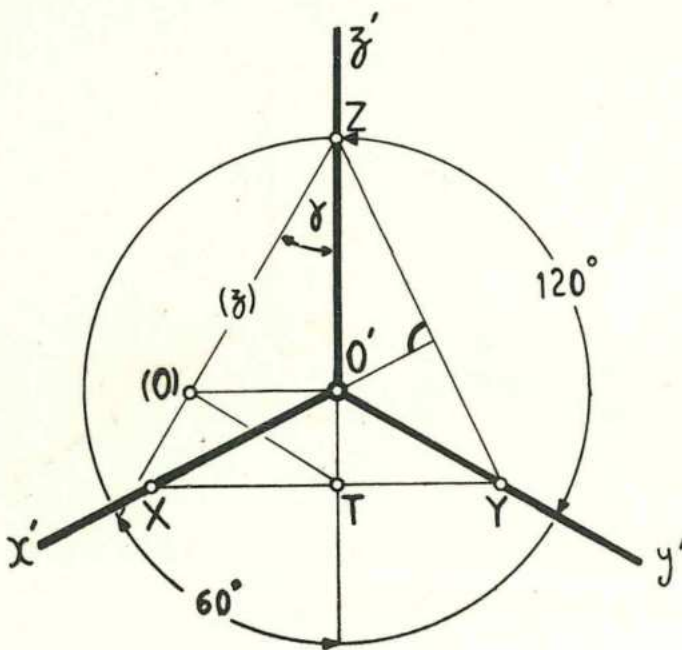


Fig. 57

γ e η não é essencialmente diferente do caso que acabamos de considerar.

VI — Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\alpha = 30^\circ$ e $\zeta = 127,5^\circ$ (fig. 58). *Equivalente ao anterior*

Res.: O facto de ser dado o ângulo α lembra que se pense no comprimento reduzido l do eixo dos x .

Desta forma, vamos tomar a *teoria e a notação* desenvolvida a propósito do exercício III.

Tomemos, arbitrariamente, o segmento XY e tracemos a circunferência que tem este segmento para diâmetro. A seguir, determina-se o ponto U e o verdadeiro comprimento (correspondente) $u = \overline{YU}$ dos eixos.

Para determinar, agora, l — tiremos por X a recta XD que forme com XY o ângulo $\alpha = 30^\circ$, dado. [Para construir XD , tomou-se D , na circunferência desenhada, sendo de 60° o arco $\widehat{YD}$]. Transportemos, depois, $\overline{XU}$ para $\overline{XE}$, sobre XD , e baixemos de E a perpendicular EF a XY .

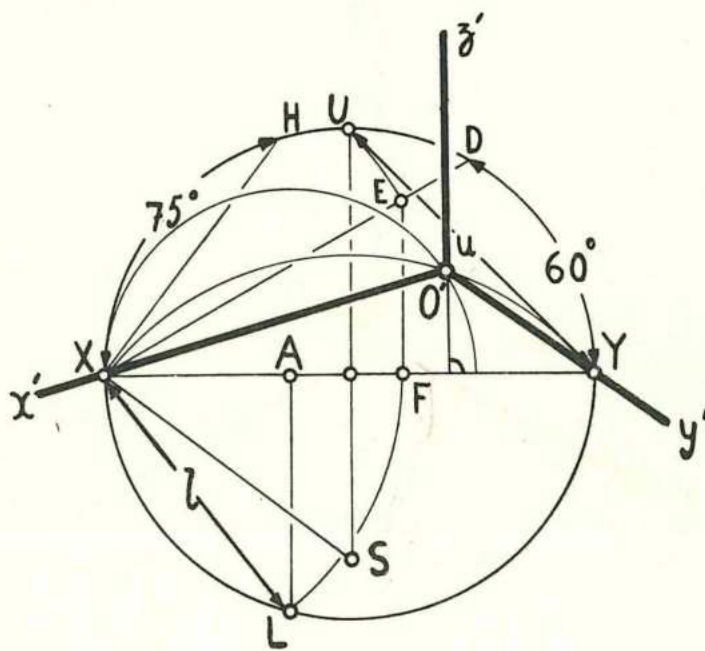


Fig. 58

Designando por F o pé da perpendicular EF a XY , temos $l = \overline{XF}$.

Determinado l , obtém-se, em seguida, L e, depois, A .

Determinado A , tracemos a circunferência de centro em A e raio $\overline{AX}$. A projecção O' da origem fica nesta circunferência e é tal que o ângulo $XO'Y$ deve medir $\zeta = 127,5^\circ$.

O problema está, por consequência, reduzido ao problema de construir um arco — de extremos X e Y — capaz dum ângulo de $127,5^\circ$.

O centro S do arco fica na perpendicular ao meio de XY e o ângulo SXY deve ser complementar do suplemento de $\zeta = 127,5^\circ$, isto é, deve medir $90^\circ - (180^\circ - 127,5^\circ) = 90^\circ - 52,5^\circ$. [Na figura,

$$\alpha = 30^\circ \quad \zeta = 120^\circ$$

suplemento de $\zeta = 120^\circ$, isto é, o ângulo $S\hat{X}Y$ deve medir $90^\circ - (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. [Na figura, obteve-se a recta XS , construindo o ponto D da circunferência do diâmetro XY , tal que o arco $\widehat{YD}$ meça 60° , e unindo, depois, X a D].

Obtida a projecção O' da origem, constroi-se, em seguida a projecção x' do eixo dos x , unindo O' a X e a projecção y' do eixo dos y , unindo O' a Y .

VIII — Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo dados $\alpha = 30^\circ$ e $\varphi = 30^\circ$ (fig. 60).

Res.: Começamos por fixar os traços, X e Y , dos eixos, x e y , respectivamente.

A recta XY representa o traço do plano xy no plano de projecção.

Por consequência, a projecção z' do eixo dos z é perpendicular a XY .

Estamos reduzidos a determinar a projecção O' da origem do sistema.

Desenhemos a circunferência que tem para diâmetro o segmento XY , que une os traços, X e Y dos eixos x e y .

Rebatendo o plano xy , o rebatimento $\bar{O}$ da origem vem cair sobre a circunferência desenhada e deve ser $\bar{O}\hat{Y}X = \varphi = 30^\circ$. Portanto, obtém-se o rebatimento $\bar{O}$ da origem construindo o arco $\widehat{X\bar{O}}$, que meça 60° .

Obtido o rebatimento $\bar{O}$ da origem, constroi-se a projecção z' do eixo dos z . [A projecção z' é a perpendicular a XY tirada por $\bar{O}$].

Visto que é dado o ângulo α , lembra, agora, tomar a teoria desenvolvida a propósito do exercício III.

Retomando essa teoria e a notação empregada, comecemos por determinar o ponto U e o verdadeiro comprimento, $u = YU$, dos eixos.

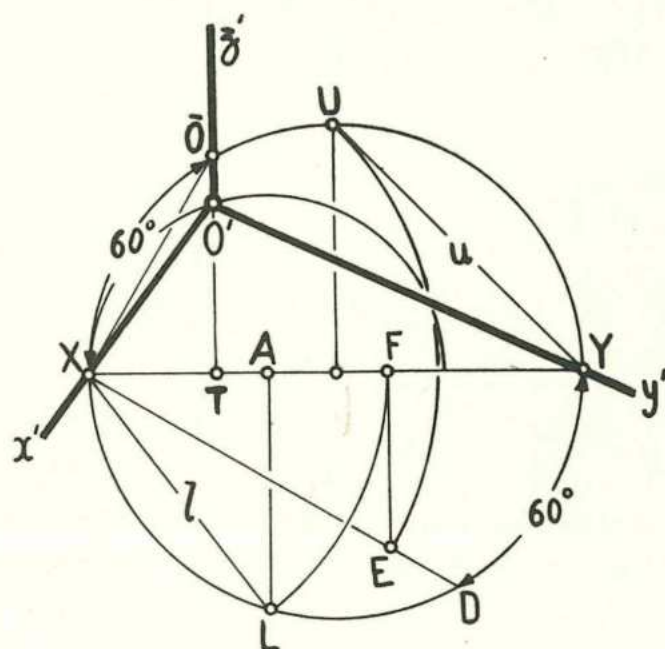


Fig. 60

Obtido $\bar{O}$, podemos construir o rebatimento $\bar{x}$ do eixo dos x . O rebatimento $\bar{x}$ é a perpendicular, em $\bar{O}$, a $\bar{O}Y$, que representa o rebatimento $\bar{y}$ do eixo dos y .

Obtido o rebatimento $\bar{x}$ do eixo dos x , determina-se o traço X deste eixo. O traço X é o ponto de intersecção de $\bar{x}$ com o traço YT do plano xy .

Unindo O' a X , temos a projecção x' , pedida, do eixo dos x .

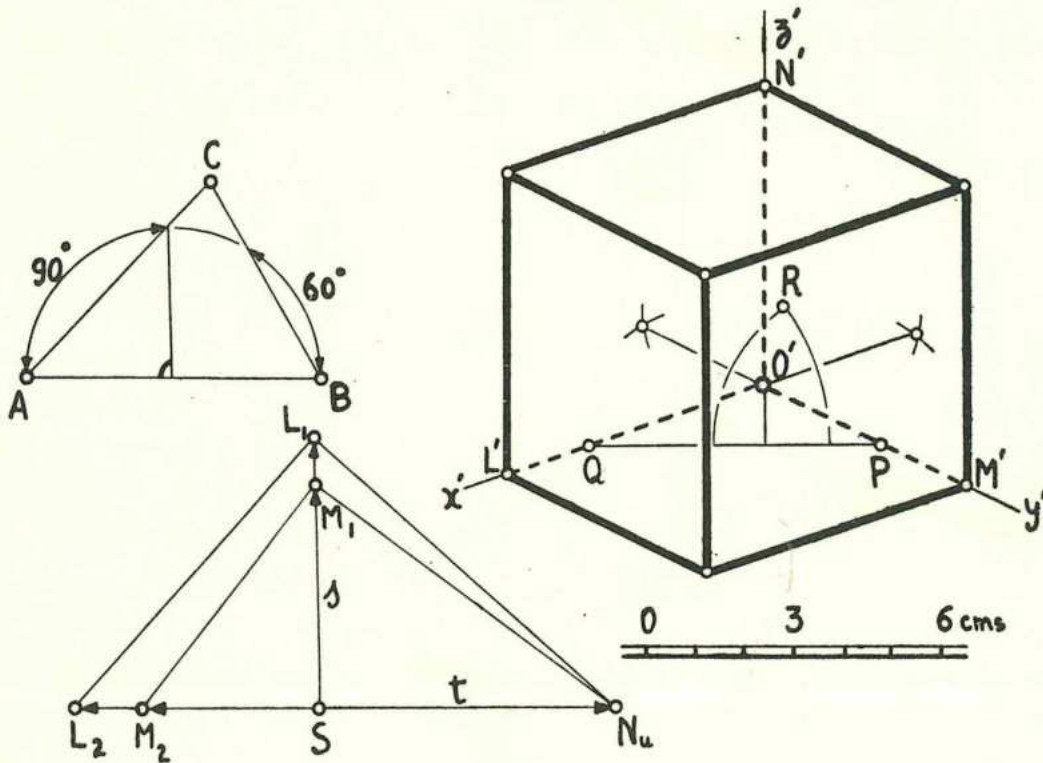


Fig. 62

Nota: — O caso de serem dados n e p não é, essencialmente, diferente do que acaba de ser considerado.

X — Desenhar um triângulo ABC com os seguintes dados: Medida do lado AB, 6 cms. Ângulo $\hat{A}$, igual a 45° . Ângulo $\hat{B}$, igual a 60° .

Construir uma projecção ortogonal dum cubo, no qual as projecções das arestas apresentem, precisamente, os comprimentos dos lados do triângulo ABC desenhado (fig. 62).

Res.: O problema proposto reduz-se essencialmente, como é manifesto, ao problema de construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo dados os comprimentos reduzidos, l , m e n .

Começemos, portanto, por construir uma projecção ortogonal

dum sistema de eixos ortogonais, na qual seja $l = AC$, $m = BC$, $n = AB$.

A melhor maneira de resolver este problema assenta, naturalmente, na teoria do triângulo de redução.

Devemos construir um triângulo PQR (triângulo de redução), sendo :

$$PQ = n^2 = \overline{AB}^2, \quad QR = l^2 = \overline{AC}^2, \quad RP = m^2 = \overline{BC}^2$$

Põe-se, pois, o problema de *quadrar* segmentos.

Quadrar um segmento não é, porém, problema determinado ; implica que seja fixada a *unidade* de comprimento e, só depois de fixada a unidade de comprimento, tem sentido falar em *quadrados* de segmentos.

Tomemos para unidade o maior, AB , dos três segmentos considerados, AB , BC e AC .

Nestas condições $\overline{AB}^2 = AB$, e, por outro lado, deve ser $\overline{BC}^2 < BC$ e $\overline{AC}^2 < AC$. [O quadrado da unidade é igual à unidade. O quadrado dum número menor que a unidade é menor que o número].

O problema de *quadrar* um segmento pode ser resolvido do modo que segue.

Tracemos duas rectas, s e t , perpendiculares uma à outra no ponto S , e sobre t marquemos SN_u igual à unidade de comprimento, considerada ; no caso presente, $SN_u = AB$.

Seja, agora, AC o segmento a quadrar.

Tomemos, em s , $SL_1 = AC$. Unamos L_1 a N_u e levantemos em L_1 a perpendicular L_1L_2 a L_1N_u . Determinemos o ponto de intersecção L_2 da perpendicular L_1L_2 com a recta t . O segmento SL_2 representa o quadrado do segmento AC .

De facto :

$$\overline{L_1S}^2 = \overline{SL_2} \cdot \overline{SN_u}$$

Donde :

$$\frac{SL_2}{SN_u} = \left(\frac{L_1S}{SN_u} \right)^2$$

ou seja :

$$\frac{SL_2}{AB} = \left(\frac{AC}{AB} \right)^2 ;$$

relação que exprime ser a medida do segmento SL_2 precisamente igual ao quadrado da medida do segmento AC .

Determinados os *quadrados* SL_2 e SM_2 de AC e BC , construí-

mos o triângulo de redução PQR , sendo $PQ = AB$, $QR = SL_2$ e $PR = SM_2$.

Convém que o lado PQ fique horizontal e que o vértice Q fique à esquerda.

Por desnecessários, não foram traçados os lados PR e QR .

Desenhado o triângulo de redução PQR , obtém-se a projecção x' do eixo dos x construindo a bissectriz do ângulo em Q ; obtém-se a projecção y' do eixo dos y , construindo a bissectriz do ângulo em P . A projecção O' da origem fica na intersecção de x' com y' .

A projecção z' do eixo dos z é a perpendicular tirada por O' ao lado QP .

Verificam-se, com efeito, os seguintes resultados:

$$Q\hat{O}'P = \pi - \left(\eta - \frac{\pi}{2} + \xi - \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi - (\eta + \xi) = 2\pi - (2\pi - \zeta) = \zeta$$

ângulo obtuso de z' com $y' = \frac{\pi}{2} + O'\hat{P}Q = \frac{\pi}{2} + \xi - \frac{\pi}{2} = \xi$.

Obtida a projecção $x'y'z'$ do sistema de eixos, a construção da projecção pedida, do cubo, não oferece qualquer dificuldade.

XI — *Determinar uma projecção ortogonal dum cubo nas condições seguintes (fig. 63):*

Designando por O um vértice do cubo e por OL , OM e ON as arestas que concorrem nesse vértice:

a) *A projecção $O'L'$ da aresta OL deve medir 7 cms.*

b) *A projecção $O'N'$ da aresta ON deve medir 8 cms.*

c) *A projecção $O'M'$ da aresta OM deve formar 75° com a projecção $O'N'$ da aresta ON .*

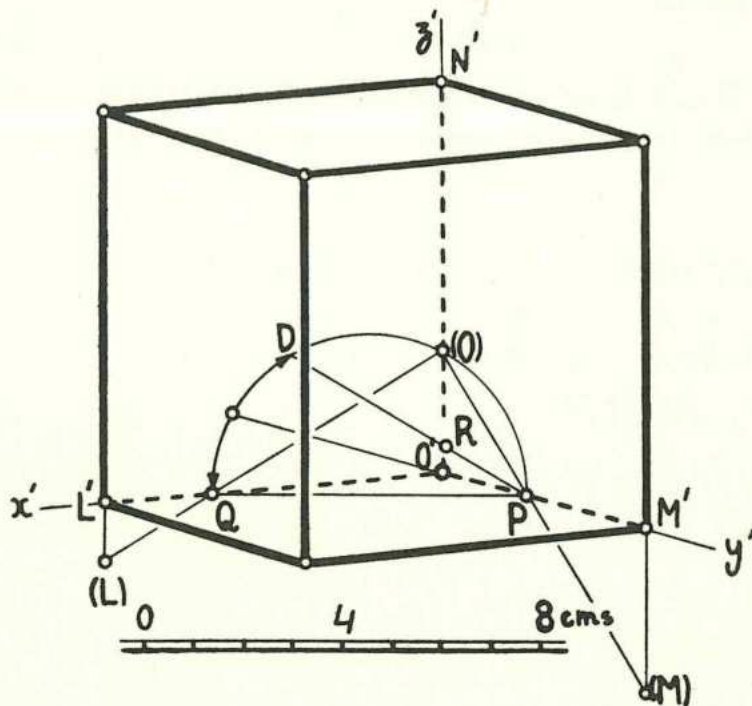


Fig. 63

Res.: Manifestamente, o problema proposto reduz-se ao problema de construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, na qual seja $\frac{l}{n} = \frac{7}{8}$ e $\xi = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

O problema resolve-se sem dificuldade pela teoria do triângulo de redução. De facto, pode verificar-se que são conhecidos os lados PQ e QR e o ângulo em P .

Temos:

$$n^2 = 64, l^2 = 49, \hat{P} = 2(\xi - 90^\circ) = 2(105 - 90) = 30^\circ.$$

Na fig. 63, o triângulo de redução PQR foi construído tomando o milímetro para unidade de comprimento. Desta forma, PQ mede 64 mms. e QR , 49 mms. Para construir o ângulo $\hat{R}PQ = 30^\circ$, desenha-se a circunferência de diâmetro PQ e nesta tomou-se o ponto D de forma que meça 60° o arco $\widehat{QD}$.

Desenhado o triângulo PQR , constroi-se, como no exercício anterior, a projecção $x'y'z'$ do sistema.

Não oferece, agora dificuldade de maior a construção da projecção pedida do cubo.

O tamanho da projecção $O'M'$ da aresta OM foi obtido pelo rebatimento do plano xy em torno de PQ .

XII — *Fixar uma projecção ortogonal $x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, designando por O' a projecção da origem; sendo $\xi = 120^\circ$ e $\eta = 135^\circ$ (fig. 64).*

Fixar, depois: em z' o ponto A' , sendo $O'A' = 3$ cms.; em x' , o ponto B' , sendo $O'B' = 4$ cms.; em y' , o ponto C' , sendo $O'C' = 3$ cms. Traçar a recta $B'C'$.

Fixar, também, a recta $a \equiv (a', a'_p)$, sendo a' perpendicular a z' em A' e sobrepondo-se a'_p a $B'C'$.

Fixar, finalmente, a recta $b \equiv (b', b'_p)$, nas condições seguintes:

A projecção b' de b contém A' e é perpendicular a y' .

A projecção b'_p da planta de b é a perpendicular a x' em B' .

Designar por α o plano que admite a recta a como recta de maior declive (de maior declive em relação ao plano de projecção).

a) *Construir as projecções p' , q' e r' dos traços p , q e r do plano α nos planos coordenados, yz , zx e xy , respectivamente.*

b) *Determinar o ponto $I = (I', I'_p)$ de intersecção da recta b com o plano α :*

Res.: *Determinação de p' : —* Tratemos em primeiro lugar da determinação de p' , projecção do traço p do plano α no plano yz .

O traço p contém o traço Y da recta a no plano yz . Na figura determinou-se a projecção Y' de Y e temos em Y' um ponto de p' .

Para determinarmos um novo ponto do traço p , precisamos de considerar uma recta de nível do plano α .

As projecções das rectas de nível de α são, como se sabe, perpendiculares a a' , portanto paralelas a z' . Convém construir a recta de nível h , que se projecta, mesmo, sobre z' .

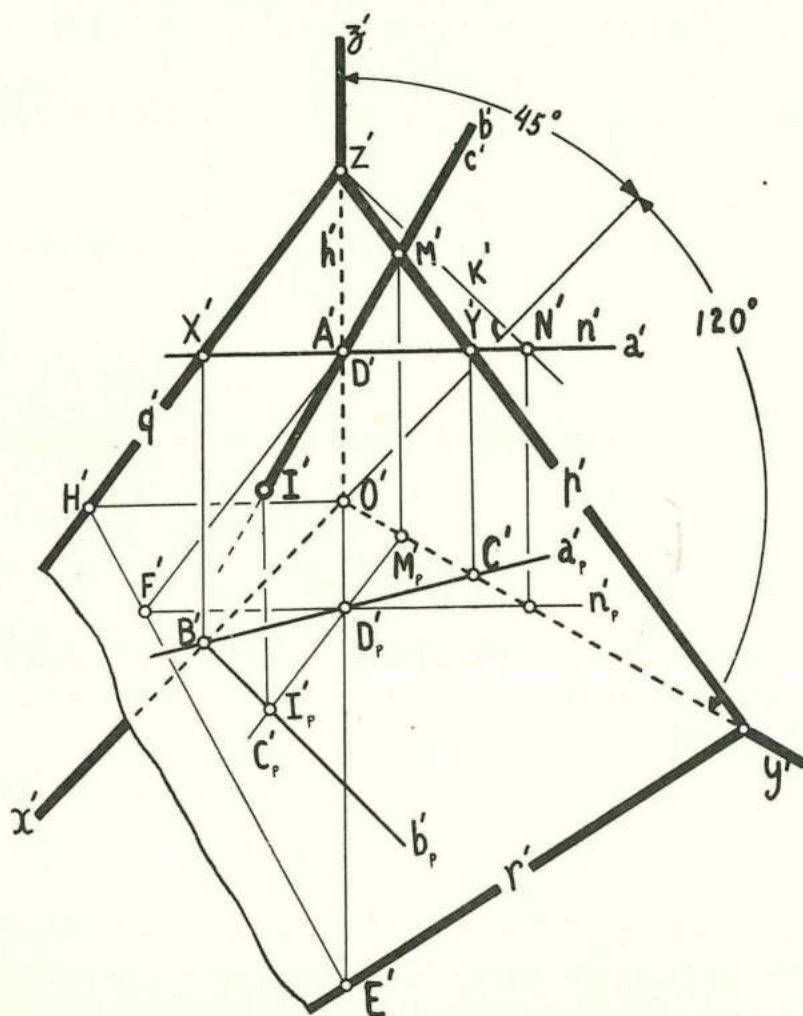


Fig. 64

A recta h intersecta a e designemos por $D = (D', D'_p)$ o ponto de intersecção. A projecção D' sobrepõe-se a A' e D'_p fica sobre $B'C'$.

A recta h intersecta, também, o eixo dos z . Designemos por Z o ponto de intersecção e procuremos a sua projecção Z' . Para tanto, tomemos o plano de nível que contém o ponto D . Por conter D , este plano contém, também, a recta h . Determinemos e designemos por k' a projecção do seu traço no plano yz .

Com semelhante finalidade, construamos a recta de nível $n = (n', n'_p)$ tirada por D e paralela ao plano xy , e determinemos a projecção N' do seu traço no plano yz .

Obtida a projecção N' , constroi-se a projecção k' tirando por N' a perpendicular a x' .

A projecção Z' do ponto de intersecção de h com o eixo dos z fica na intersecção de k' com z' .

Determinada a projecção Z' , a projecção p' do traço do plano α com o plano yz obtém-se unindo Z' a Y' .

Determinação de q' : — A projecção q' do traço de α no plano xz contém Z' .

Determinemos a projecção X' do traço da recta a no plano xz . Temos em X' um novo ponto de q' .

Determinação de r' : — Construídas as projecções p' e q' , para determinar a projecção r' do traço de α no plano xy , basta unir o ponto de intersecção de p' com y' ao ponto de intersecção de q' com x' .

No caso presente, porém, o ponto de intersecção de q' com x' está fora dos limites do desenho.

Vamos procurar um novo ponto de r' e, para tanto, vamos procurar a projecção E' do traço no plano xy da recta de nível h considerada.

Para determinarmos o traço de h em xy , tomamos o método geral da Geometria Descritiva: toma-se um plano que contenha h e determina-se o traço deste plano no plano xy .

Na figura, H' representa a projecção dum ponto H do plano xy .

Tomamos o plano Hh . A recta HZ pertence a este plano. Como o ponto D pertence à recta h , a paralela tirada por D a HZ pertence ao plano Hh . Determinemos a projecção F' do traço desta paralela no plano xy . A recta $H'F'$ representa a projecção do traço do plano Hh no plano xy e, portanto, E' encontra-se na intersecção de $H'F'$ com $h' = z'$.

Determinação de $I \equiv (I', I'_p)$: — Um método geral para determinar a intersecção duma recta $b \equiv (b', b'_p)$ com um plano α consiste em construir uma recta $c \equiv (c', c'_p)$ do plano α que tenha c' sobreposta a b' ou c'_p sobreposta a b'_p . [Duas rectas com a mesma projecção ou com a mesma planta são complanas e, portanto, intersectam-se].

Vamos construir a recta $c \equiv (c', c'_p)$ do plano α cuja projecção c' se sobrepõe a b' . Temos que determinar a projecção c'_p da sua planta. O problema resolve-se comparando a recta pedida c com

rectas do plano α . Comparando c com o traço p do plano α em yz , verifica-se que c e p se intersectam. Determinando o ponto de intersecção, encontra-se o ponto $M \equiv (M', M'_p)$. Comparando c com a , verifica-se que estas se intersectam no ponto $D \equiv (D', D'_p)$. A projecção c'_p da planta de c obtém-se, portanto, unindo M'_p a D'_p . Na intersecção de c'_p com b'_p fica a projecção I'_p da planta do ponto I . De I'_p , segue a projecção I' .

XIII — Desenhar um triângulo XYZ , sendo $XY = 16$ cms., $XZ = 14$ cms., $YZ = 12$ cms. (fig. 65).

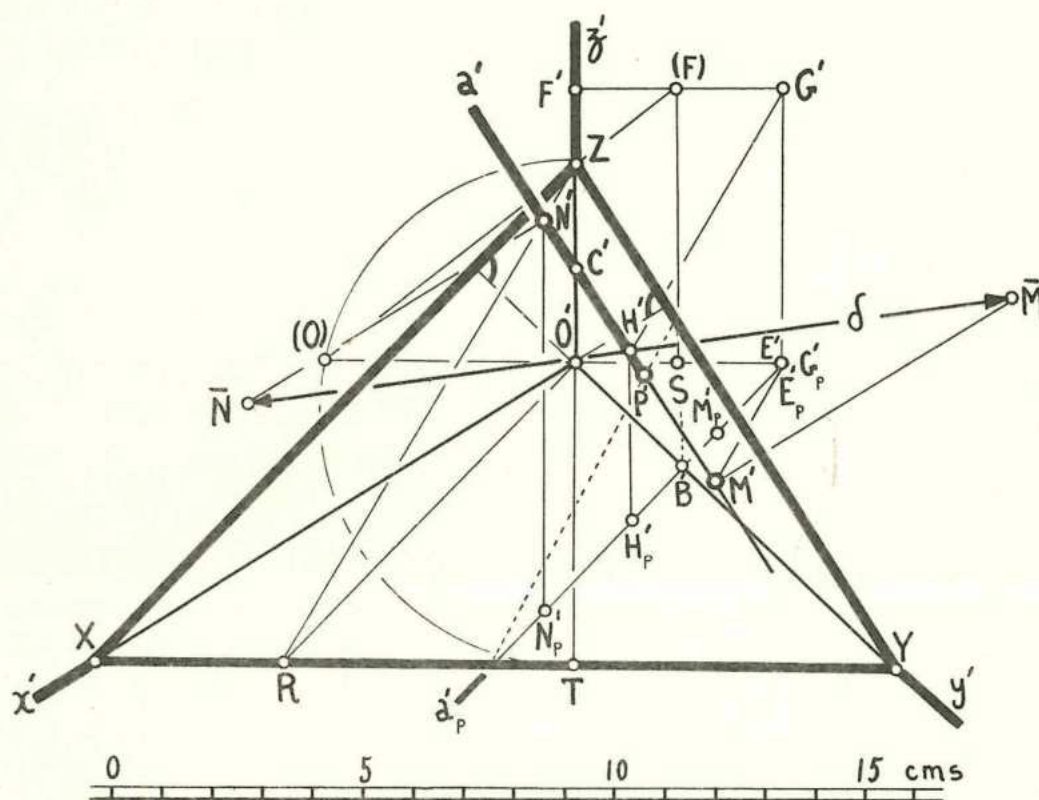


Fig. 65

Fixar a projecção ortogonal $x'y'z'$ do sistema de eixos ortogonais que admite o triângulo desenhado XYZ como triângulo axonométrico, designando a projecção da origem por O' .

Fixar, depois: em y' , B' , sendo $O'B' = 3$ cms.; em z' , C' , sendo $O'C' = 2$ cms.

Construir a recta $a = (a', a'_p)$, assim definida:

A projecção a' contém C' e é perpendicular a x' .

A projecção a'_p da planta contém B' e é perpendicular a y' .

Determinar:

a) O ponto $M \equiv (M', M'_p)$ da recta a com cota igual à da origem do sistema.

b) O ponto $N \equiv (N', N'_p)$ da recta a cuja cota excede em 14 cms. a cota da origem do sistema.

c) A distância $\hat{z}$ dos pontos M e N .

Nota: — Por cota entende-se, aqui, distância ao plano de projecção. Para fixar o sentido de variação das cotas, convencionou-se que estas aumentam quando nos deslocamos sobre o eixo dos z no sentido positivo.

Res.: Tomamos para plano de projecção o plano XYZ e, desta forma, os pontos e rectas deste plano serão designados por letras não acentuadas.

Para facilitar a resolução do problema, convém que se determine a direcção das rectas de nível dos planos paralelos à recta a e ao eixo dos z . Para tanto, consideremos o plano que contém o eixo dos z e é paralelo à recta a . A projecção do traço deste plano no plano xy é a paralela $O'R$ a a'_p , tirada por O' . Designando por R o ponto de intersecção de $O'R$ com XY , a recta ZR representa a intersecção do plano, que estamos a considerar, com o plano XYZ (plano de projecção) e dá-nos, portanto, a direcção procurada das rectas de nível dos planos simultaneamente paralelos à recta a e ao eixo dos z .

a) *Determinação do ponto $M \equiv (M', M'_p)$* : — Este ponto deve ter a mesma cota que a origem O e pertencer à recta a . Vamos tomar um *caminho* de nível que nos leve de O à recta a e atingirmos o ponto M . O caminho pode ser o seguinte: 1.º) Seguindo a recta de nível, que contém O , e pertence ao plano xy , até atingirmos a planta a_p da recta a . Alcança-se assim, o ponto $E \equiv (E', E'_p)$ de a_p . 2.º) Seguindo, depois, a paralela $EM \equiv (E'M', E'_p M'_p)$, tirada por E , à recta de nível ZR .

Seguindo EM , alcança-se a recta a no ponto $M \equiv (M', M'_p)$ procurado.

b) *Determinação do ponto $N \equiv (N', N'_p)$* : — O ponto N deve pertencer à recta a e a sua cota exceder em 14 cms. a cota da origem.

Se conhecessemos um ponto com a cota considerada — 14 cms mais que a cota de O — determinava-se N pelo mesmo método, por que foi determinado M . Agora trata-se, porém, dum problema de *cota absoluta*, não de cota relativa.

A cota absoluta de O (distância de O ao plano XYZ tomado para plano de projecção) pode ser determinada pelo rebatimento do plano projectante do eixo dos z , por exemplo. Determinando o rebatimento (O) da origem, a cota de O (supõe-se negativa) é, em valor absoluto, igual a $(O)O'$.

Procuraríamos, agora, o ponto do eixo dos z cuja cota excedesse em 14 cms a cota de O . Tal ponto não tem, porém, projecção dentro dos limites do desenho.

Procuraremos, por semelhante motivo, o ponto F do eixo dos z cuja cota excede, apenas, em 7 cms (metade do valor considerado) a cota da origem. Determinamos o ponto H de a que tem a cota de F . Depois, manifestamente, o ponto N , pedido, é o ponto de a , que dista tanto de H como H dista de M .

Determinemos, então, a projecção F' de F . Para tanto, comecemos por determinar o rebatimento (F) de F . [Na figura, determinou-se (F): 1.º tomando-se $(O)S = 7 \text{ cms}$, sobre $(O)O'$, no sentido de (O) para O' ; 2.º tirando $S(F) \parallel z'$; 3.º determinando a intersecção de $S(F)$ com $(O)Z$].

Construído o rebatimento (F), a projecção F' é o pé da perpendicular baixada de (F) sobre z' .

Tomemos, agora, a recta de nível FG , que é paralela ao plano xy e passa por F . Determinemos o ponto $G \equiv (G', G'_p)$ da recta FG cuja planta fica em a_p . Partindo do ponto G e seguindo a recta de nível $GH \parallel ZR$ atinge-se a recta a no ponto H , que tem a cota de F , portanto, de cota que excede a da origem em 7 cms.

Tomando $N'H' = M'H'$, obtém-se a projecção N' do ponto N , procurado.

De N' , segue a projecção N'_p da planta de N .

Distância δ de N a M : — Manifestamente, a distância de dois pontos é dada pela hipotenusa dum triângulo rectângulo em que um dos catetos é a projecção do segmento, que une as projecções, e o outro cateto, a diferença de cotas.

Na figura, $N'\bar{N}$ mede 7 cms e é perpendicular a a' em N' . A hipotenusa $\bar{N}H'$ do triângulo $\bar{N}N'H'$ dá a distância de N a H .

A distância pedida, de N a M , é dupla.

Nota: Para que a figura ficasse mais expressiva, determinou-se a projecção P' do traço P da recta a no plano XYZ e desenhou-se a traço forte a parte da recta a que não é oculta pelo plano XYZ .

XIV — *Fixar uma projecção ortogonal $x'y'z'$, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais, designando a projecção da origem por O' (fig. 66).*

Fixar, depois: em z' , o ponto A' sendo $O'A' = 3 \text{ cms}$.; em x' , o ponto S'_p , sendo $O'S'_p = 3 \text{ cms}$.

Construir a recta $a \equiv (a', a'_p)$, assim definida:
 A projecção a' contém A' e é perpendicular a z' .
 A projecção a'_p da planta contém S'_p e é perpendicular a x' .
 Determinar as projecções p' , q' e r' dos traços p , q e r nos planos coordenados, yz , zx e xy , respectivamente, do plano que é perpendicular à recta a no traço S desta recta no plano xz .

Res.: Queremos com o presente exercício considerar um método geral de resolver problemas de perpendicularidade cuja base

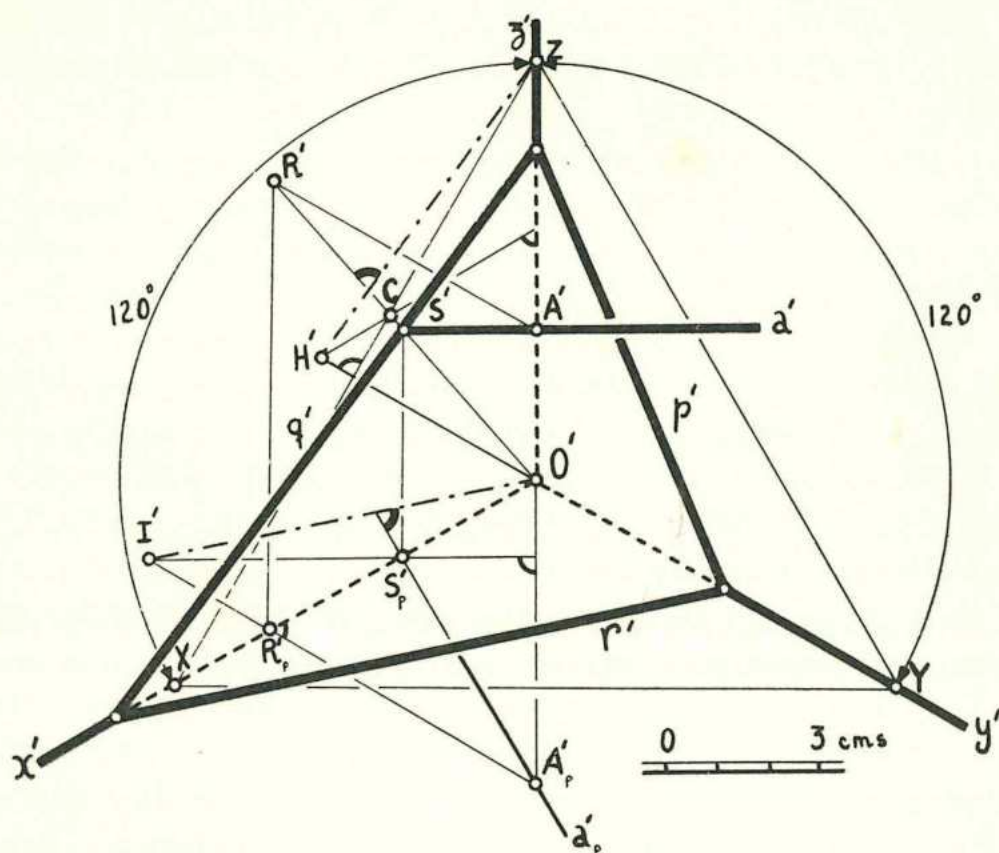


Fig. 66

assenta no conhecido princípio que afirma serem as três alturas dum triângulo concorrentes num mesmo ponto.

Sabe-se que, quando um plano é perpendicular a uma recta, o traço do plano é perpendicular à projecção ortogonal da recta.

Assim, visto que a planta a_p da recta a é, precisamente, a projecção ortogonal da recta a sobre o plano xy , o traço r no plano xy dum plano perpendicular a a é perpendicular a a_p .

Do facto que r é perpendicular a a_p , não segue, bem entendido, que sejam perpendiculares as projecções r' e a'_p . Só, assim sucederia, se uma das rectas, r e a_p , fosse de nível. Mas, conhecida a direcção da projecção a'_p , a direcção da projecção r' pode ser obtida

pelo princípio referido, que afirma serem as alturas dum triângulo concorrentes num mesmo ponto. É questão de considerar um triângulo do plano xy , de que um dos lados seja a_p ou paralelo, e do qual saibamos construir as projecções de duas das suas alturas.

Determinação da direcção da projecção r' : — Designemos por A'_p a intersecção de z' com a'_p . Consideremos e designemos por S_p o ponto do eixo dos x que se projecta em S'_p ; por A_p , o ponto do plano xy que se projecta em A'_p . O triângulo OS_pA_p está no plano xy .

Procuremos determinar as projecções das alturas.

Altura relativa ao vértice A_p . — Esta altura (perpendicular ao eixo dos x) é paralela ao eixo dos y . Portanto, a sua projecção A'_pI' é paralela a y' .

Altura relativa ao vértice S_p . — Esta altura é perpendicular à recta OA_p . Ora, a recta OA_p é de maior declive do plano xy . Por consequência, a projecção S'_pI' da altura é perpendicular à projecção $O'A'_p$ da recta de maior declive.

Sendo I' o ponto de cruzamento das projecções das duas alturas consideradas, por I' passa, também, a projecção da terceira altura e esta obtém-se, portanto, unindo I' a O' .

Temos, assim, determinada a direcção da projecção r' dos traços no plano xy dos planos perpendiculares à recta a ; é a direcção da recta $O'I'$ (desenhada a traço misto na figura).

Determinação da direcção da projecção q' do traço no plano xz : — Lembra procurar a projecção da recta a sobre o plano xz e seguir o método usado na determinação da direcção de r' .

Comecemos por determinar o traço $S \equiv (S', S'_p)$ de a no plano xz .

Em S , temos um ponto da projecção procurada de a no plano xz .

Tomemos, agora, na recta a um ponto $A \equiv (A', A'_p)$ (A' sobre a' , A'_p sobre a'_p). Projectemos A , ortogonalmente, no plano xz . Para tanto, temos que tirar por A a perpendicular $AR \equiv (A'R', A'_pR'_p)$ ao plano xz e determinar o seu traço $R \equiv (R', R'_p)$ neste plano. A recta AR , por ser perpendicular ao plano xz , é paralela ao eixo dos y , portanto, $A'R' // A'_pR'_p // y'$.

Em R , temos um segundo ponto da projecção ortogonal de a no plano xz .

Unindo S' a R' , obtivemos a projecção no plano de projecção da projecção SR da recta a sobre o plano xz .

Procuremos, agora, a direcção da projecção q' do traço q .

Comecemos por observar que a projecção SR — de a no plano xz — passa pela origem, e, portanto, $S'R'$ por O' . Este facto

resulta de ser $O'A' = O'S'_p$, $a' \perp O'A'$, $a'_p \perp O'S'_p$ e a projecção isométrica (1).

É, também, corrente, quando se apresenta uma projecção isométrica dum sistema de eixos ortogonais, apresentar conjuntamente um triângulo axonométrico, porque um tal triângulo XYZ facilita as construções a efectuar subsequentemente, e, no caso de projecção isométrica, tal triângulo é de construção imediata: $O'X = O'Y = O'Z$.

Na figura está construído um triângulo axonométrico XYZ , designado por letras não acentuadas, porque queremos considerar que o plano de projecção seja o plano do triângulo.

Sendo, assim, fixado o plano de projecção, designemos por C o traço da recta SR . Manifestamente, C está na recta ZX .

Consideremos o triângulo OZC , que pertence ao plano xz , e procuremos as projecções das suas alturas.

Altura relativa ao vértice C . — Esta altura (perpendicular ao eixo dos z) é paralela ao eixo dos x . Portanto, a sua projecção CH' é paralela a x' .

Altura relativa ao vértice O . — Esta altura é perpendicular à recta ZC , que está no plano de projecção. Portanto, a sua projecção $O'H'$ é também, perpendicular à recta ZC .

Sendo H' o ponto de cruzamento das projecções das duas alturas consideradas, por H' passa, também, a projecção da terceira altura e esta obtém-se, por consequência, unindo Z a H' .

Fica, assim, determinada a direcção da projecção q' dos traços no plano xz dos planos perpendiculares à recta a ; é a direcção da recta ZH' , desenhada na figura a traço misto.

Nenhuma dificuldade se apresenta, agora, em construir as projecções dos traços do plano considerado.

O plano passa por S , portanto, q contém S e, assim, obtém-se q' construindo a paralela a ZH' , tirada por S' .

A projecção r' de r obtém-se determinando o ponto de intersecção de q' com x' e construindo a paralela a $O'I'$, que passa por esse ponto.

Finalmente, a projecção p' de p obtém-se unindo o ponto de intersecção de q' com z' ao ponto de intersecção de r' com y' .

XV — Desenhar uma projecção ortogonal $x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = 120^\circ$ e $\eta = 135^\circ$ e designando a projecção da origem por O' (fig. 67).

(1) Por ser isométrica a projecção, y' é bissectriz do ângulo $\widehat{A'O'S'_p}$; logo a' e a'_p intersectam-se sobre y' e, portanto, a recta a intersecta o eixo dos y .

Fixar, depois: em x' , o ponto A' , sendo $O'A' = 6$ cms.; em y' , o ponto B' , sendo $O'B' = 5$ cms.; em z' , o ponto C' , sendo $O'C' = 8$ cms.

Desenhar o triângulo $A'B'C'$.

Designando por A o ponto do eixo dos x , que se projecta em A' ; por B , o ponto do eixo dos y , que se projecta em B' ; por C , o ponto do eixo dos z , que se projecta em C' ;

a) Desenhar um triângulo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ semelhante ao triângulo ABC , utilizando, exclusivamente, o método das figuras semelhantes;

b) Determinar, em seguida, a representação e' do eixo do plano.

Res. Poderemos seguir dois caminhos:

Começar por determinar, pelo método das figuras semelhantes, as projecções das alturas do triângulo ABC , donde, depois, seguiria, imediatamente, a construção do triângulo semelhante;

Ou começar por transportar os lados do triângulo ABC para um dos planos coordenados.

O primeiro caminho será, talvez, mais curto, mas implica que, em primeiro lugar, se determine o eixo do plano; seguindo, depois, o desenho do triângulo semelhante, como consequência da determinação feita do eixo.

Do enunciado posto deduz-se, porém, que seja a determinação do eixo consequência da determinação da forma do triângulo e não a forma do triângulo consequência do conhecimento do eixo.

Tomaremos, por isso, o segundo caminho: porque se mostra mais de acordo com o enunciado posto e mais apropriado à exposição dos princípios que temos em vista considerar.

Vamos transportar o lado AC para o eixo dos z e o lado AB para o eixo dos y .

Transporte do lado AC para o eixo dos z :

O método, que designamos pelo nome de *método das figuras semelhantes*, foi considerado já no capítulo anterior. Permite construir uma *figura semelhante* a uma figura F , a partir duma representação, F' , dada, da mesma figura. As dimensões da figura, que, pela aplicação do método, se constrói, dependem da recta que se toma como *base de construção*.

No caso de se tratar de projecção ortogonal, como é presentemente o caso, entre as figuras semelhantes à figura F , que pela aplicação estrita do método se podem construir, existe uma mínima e uma máxima. A figura mínima obtém-se quando se toma como *base*

de construção uma recta de maior declive; a máxima, quando se tome como *base de construção* uma recta de nível. E é de notar que, por ser de nível a recta que se toma como *base de construção*, a figura máxima tem as dimensões da própria figura F considerada e, portanto, é-lhe não sòmente semelhante, mas mesmo igual.

Para poupar espaço, vamos, sistematicamente, tomar rectas de maior declive como *base de construção*, operando, assim, com figuras mínimas.

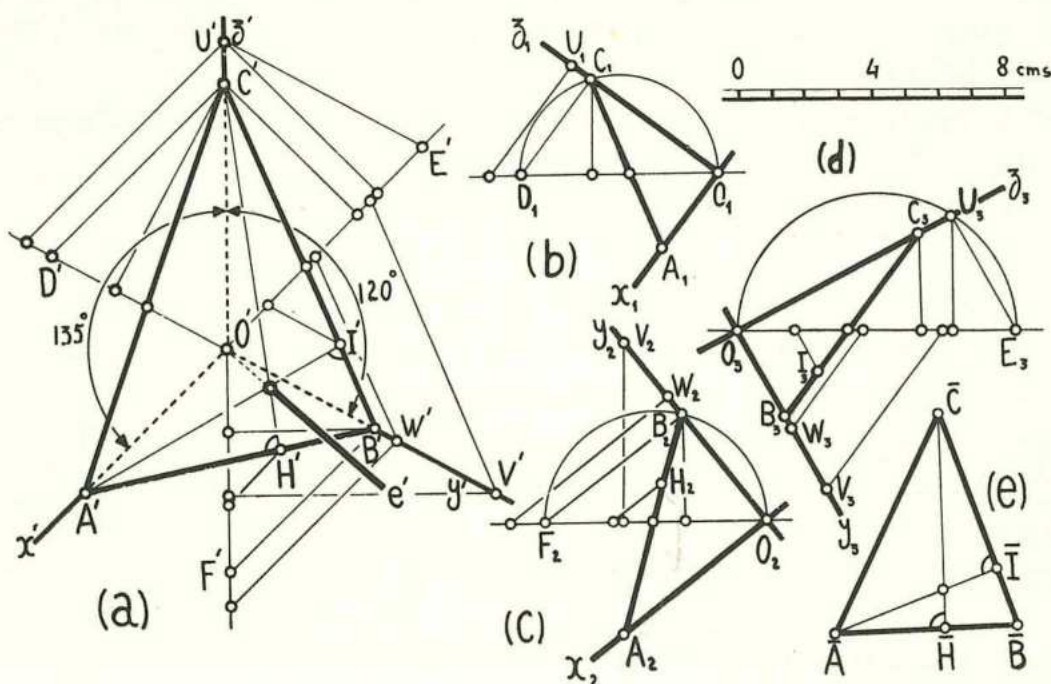


Fig. 67

Comecemos por tirar $C'D' // x'$ e seja D' a intersecção de $C'D'$ com y' .

Consideremos, agora, o triângulo OCD do plano xz cujos vértices O , C e D se projectam em O' , C' e D' , respectivamente. Sabemos que o triângulo OCD é rectângulo em C e que a altura do vértice C se projecta na perpendicular tirada por C' a $O'D'$.

Temos, assim, os elementos necessários para aplicar o método das figuras semelhantes na resolução do problema do transporte de AC para o eixo dos z .

[Recordemos que é da essência do método das figuras semelhantes, que segmentos sobre a *base* ou em rectas paralelas à *base* não sofrem ampliação ou redução, transportando-se simplesmente — a compasso — da representação para a figura que se constrói].

Para facilitar a exposição e, também, para melhor entendimento das figuras, designaremos os pontos e rectas da figura que se cons-

trói pelas mesmas letras dos elementos a que correspondem, afectadas, cada uma, dum mesmo índice — do índice — 1 — na figura que agora vamos considerar.

Tomemos como base de construção a recta OD , de maior declive do plano xz .

Em primeiro lugar, constrói-se o triângulo $O_1 C_1 D_1$ semelhante a OCD , sendo $O_1 D_1 = O'D'$ (fig. 67 (b)). [Por se saber que o ângulo em C é recto, C_1 tem de ficar na circunferência de diâmetro $O_1 D_1$. Transporta-se, depois, o pé da altura relativa a C e no ponto obtido constrói-se a perpendicular a $O_1 D_1$ e, assim, temos a altura relativa a C_1].

A recta z_1 homóloga do eixo de z , é $O_1 C_1$. A homóloga x_1 do eixo dos x é a paralela a $C_1 D_1$ tirada por O_1 . O homólogo $A_1 C_1$ do lado AC obtém-se, simplesmente, tomando o ponto de intersecção com a base.

Tomemos, agora, em z_1 , $O_1 U_1 = A_1 C_1$. Resta achar a projecção U' que corresponde a U_1 . Esta foi obtida pelo traçado duma recta paralela a $C_1 D_1$, e, depois, uma paralela a $C'D'$.

O que podemos concluir das construções feitas é que o segmento OU do eixo de z , que está projectado em $O'U'$, é, precisamente, igual ao lado AC do triângulo considerado ABC , projectado em $A'B'C'$.

Transporte do lado AB para o eixo dos y .

Começemos por traçar $B'F' // x'$. Seja F' o ponto de intersecção de $B'F'$ com z' . Consideremos o triângulo OBF do plano xy , que tem para projecção $O'B'F'$.

Sabe-se que o triângulo OBF é rectângulo em B e que a altura relativa ao vértice B se projecta na perpendicular a z' tirada por B' .

Estamos, assim, habilitados a aplicar o método das figuras semelhantes na realização do transporte de AB para o eixo y .

As construções correspondentes à resolução do problema encontram-se na fig. 67 (c), sendo — 2 — o índice adoptado.

Construiu-se $O_2 B_2 F_2$ semelhante ao triângulo OBF considerado no plano xy , sendo $O_2 F_2 = O'F'$. A recta y_2 , homóloga do eixo dos y , é $O_2 B_2$; a recta x_2 , homóloga do eixo x , é a paralela a $B_2 F_2$ tirada por O_2 . Construiu-se, em seguida, $A_2 B_2$, homóloga do lado AB , e transportou-se $A_2 B_2$ para y_2 , obtendo-se $O_2 V_2 = A_2 B_2$.

Depois de construído V_2 , determinou-se a projecção correspondente V' .

Pode afirmar-se que o segmento OV do eixo dos y , que tem $O'V'$ para projecção, é igual, precisamente, ao lado AB do triângulo ABC .

Devemos, agora, construir uma figura semelhante à figura $OBCUV$ do plano yz , que se encontra projectada em $O' B' C' U' V'$.

Tiremos $U'E' \parallel y'$ e designemos por E' a intersecção de $U'E'$ com x' .

Consideremos o triângulo OUE do plano yz cujos vértices O , U e E se projectam em O' , U' e E' , respectivamente.

O triângulo OUE é rectângulo em U e a altura relativa ao vértice U projecta-se na perpendicular baixada de U' sobre $O'E'$.

Tomemos para base de construção a recta OE de maior declive do plano yz .

A construção é apresentada na fig. 67 (d), sendo — 3 — o índice adoptado.

Construiu-se o triângulo $O_3U_3E_3$ semelhante ao triângulo OUE , sendo $O_3E_3 = O'E'$. A homóloga z_3 do eixo dos z é a recta O_3U_3 ; a a homóloga y_3 do eixo dos y , a paralela a U_3E_3 tirada por O_3 . Determinou-se, depois, C_3 , homólogo de C , por meio duma recta de nível e, a seguir, o homólogo C_3B_3 de CB . Determinou-se V_3 , homólogo de V , por meio duma paralela a $B'C' - B_3C_3 - BC$.

Desenho do triângulo $\overline{A B C}$:

Para construir o triângulo $\overline{A B C}$ fig. 67 (e), resta agora tomar: $\overline{A B} = O_3V_3$; $\overline{A C} = O_3U_3$; $\overline{B C} = B_3C_3$.

Determinação da projecção e' do eixo do plano ABC :

Por eixo dum plano entende-se a perpendicular baixada da origem ao plano.

O eixo dum plano intersecta o plano, precisamente, no ponto de cruzamento das alturas do triângulo determinado pelos traços do plano nos planos coordenados.

Desta forma, para resolvermos o problema proposto, apenas temos que determinar a projecção do ponto de cruzamento das alturas do triângulo ABC considerado.

Para tanto, construamos as alturas $\overline{CH}$ e $\overline{AI}$ do triângulo $\overline{A B C}$ (fig. 67 (e)); a primeira, relativa ao vértice $\overline{C}$; a segunda, relativa ao vértice $\overline{A}$. Determinemos os pés $\overline{H}$ e $\overline{I}$ da primeira e segunda altura, respectivamente.

Resta determinar as projecções H' e I' correspondentes aos pontos $\overline{H}$ e $\overline{I}$.

A projecção I' obtém-se, directamente, por intermédio da fig. 67 (d).

Determinou-se I_3 , tomando, sobre C_3B_3 , $C_3I_3 = \overline{C I}$; depois, determinou-se I' por intermédio duma recta paralela a $y_3 - y' - y$.

A determinação da projecção H' é mais complexa; implica a utilização das fig. 67 (b) e 67 (c).

Transporta-se o segmento AH para o eixo dos y e, depois, deste eixo para o lado AB do triângulo ABC .

Efectuar o primeiro transporte equivale a determinar o ponto W de y , tal que $OW = AH$. Começamos por determinar o homólogo W_3 de W na fig. 67 (d), tomando simplesmente $O_3W_3 = \bar{A}\bar{H}$. Depois, determinámos W' por intermédio duma paralela a $B_3C_3 - B'C' - BC$.

A seguir, determinou-se o homólogo W_2 de W na fig. 67 (c) por intermédio duma recta paralela a $x' - x_2 - x$. Tomou-se, depois, sobre A_2B_2 , $A_2H_2 = O_2W_2$ e, finalmente, determinou-se a projecção H' correspondente a H_2 por intermédio duma paralela a $x_2 - x' - x$.

A projecção e' do eixo é a recta que une O' com ponto de cruzamento de $A'I'$ e $C'H'$.

Exercícios

141. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = 120^\circ$ e $\eta = 115^\circ$.

Determinar a projecção dum cubo, de arestas iguais a 5 cms., tendo um vértice na origem do sistema e as arestas, que partem deste vértice, sobre os eixos coordenados.

142. Fixar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = \eta$ e $\zeta = \frac{3\pi}{4}$ radianos.

Construir a escala de redução correspondente à projecção fixada.

143. Sendo $\gamma = \rho = 45^\circ$, desenhar uma projecção ortogonal do paralelepípedo rectângulo que tenha três arestas sobre os eixos, as quais meçam, respectivamente, 4, 5 e 6 cms.

144. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\alpha = \beta$ e $\gamma = 30^\circ$.

145. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\alpha = \beta = 30^\circ$.

146. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\alpha = \gamma$ e $\rho = 30^\circ$.

Nota: Comece-se por fixar arbitrariamente os traços X e Z dos eixos x e z , respectivamente. A projecção y' de y obtém-se

construindo a perpendicular ao meio de XZ . Pode determinar-se o tamanho de XO e, assim, do triângulo XOT , rectângulo em T , ficamos a conhecer a hipotenusa XO e o ângulo agudo $X\hat{O}T = \varphi = 30^\circ$, podendo-se, por isso, determinar o tamanho do cateto XT . Determinado XT , obtém-se a projecção z' de z , tirando por Z uma tangente à circunferência de centro em X e de raio igual ao valor determinado do tamanho de XT .

147. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\beta = \gamma$ e $\varphi = 30^\circ$.

148. Fixar uma elipse pelos seus eixos que devem medir 11 cms. e 7 cms.

Determinar dois diâmetros da elipse fixada, os quais formem 105° e sejam conjugados.

Nota: O problema pode não ter solução; ou, então, ter uma ou duas soluções. Pode reduzir-se ao problema de construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, em que são dados os ângulos γ e ζ .

149. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\alpha = 45^\circ$ e $\zeta = 120^\circ$.

150. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\beta = 30^\circ$ e $\varphi = 60^\circ$.

151. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\eta = 120^\circ$ e $\varphi = 30^\circ$.

152. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\zeta = 120^\circ$ e $\varphi = 30^\circ$.

153. Determinar uma projecção ortogonal dum cubo, tal que os comprimentos das projecções das arestas sejam: $l = m = 5$ cms. e $n = 6$ cms.

154. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\zeta = 120^\circ$ e $\frac{l}{1} = \frac{m}{2}$.

155. Desenhar um triângulo isósceles cuja base e o ângulo a esta oposto meçam, respectivamente, 4 cms. e 45° .

Determinar uma projecção ortogonal dum cubo cujas arestas se projectem em segmentos l , m e n iguais, respectivamente, aos lados e à base do triângulo desenhado.

156. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $l=5$ cms., $m=4$ cms. e $\alpha = 30^\circ$.

Determinar, depois, o valor de n .

157. Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $m=6$ cms., $n=4$ cms. e $\alpha = 30^\circ$.

Determinar, depois, o valor de l .

158. Designando por L um ponto do eixo dos x e por M , um ponto do eixo dos y ; sendo $OL = OM = 4$ cms. e excedendo as cotas de L e M em 2 cms. e 3 cms., respectivamente, a cota de O , determinar a projecção do sistema (cota, distância ao plano de projecção).

Nota: Podem determinar-se os comprimentos reduzidos l e m de OL e OM e o comprimento correspondente do segmento XY que une os traços dos eixos x e y .

159. Construir uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais de modo que entre os comprimentos reduzidos se tenham as seguintes relações:

$$l = \frac{m}{2} = \frac{n}{\sqrt{3}}$$

Determinar, depois, a projecção dum cubo, de arestas iguais a 6 cms., o qual tenha um vértice na origem e as três arestas que partem deste vértice sobre os eixos do sistema considerado.

160. Fixar uma projecção monodimétrica dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\zeta = 105^\circ$. [Supõe-se que sejam x e y os eixos igualmente inclinados sobre o plano de projecção].

Fixar, depois, o ponto A , do eixo dos x , sendo, em projecção, $O'A' = 3$ cms.

Desenhar a projecção do paralelepípedo trirrectângulo cujas dimensões estão entre si como 3 : 4 : 5, que tem um vértice na origem do sistema e as três arestas que partem deste vértice sobre os eixos coordenados, sendo a que está sobre o eixo dos x igual a OA .

161. Determinar uma projecção ortogonal dum cubo, tal que uma das arestas que partem dum mesmo vértice seja paralela ao plano de projecção e as outras duas se projectem em segmentos medindo 4 cms. e 5 cms., respectivamente.

162. Determinar uma projecção ortogonal dum paralelepípedo trirrectângulo de forma que as projecções de todas as suas arestas sejam iguais, sendo duas das dimensões do paralelepípedo iguais a 4 cms. e a terceira igual a 6 cms.

Nota: O problema pode resolver-se pela teoria da projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais. Designando por k o comprimento comum das projecções das arestas e tendo em vista que 12 é o m. m. c. de 4, 4 e 6, tomando $u = 12$ cms. vem $l = 3k$, $m = 3k$, $n = 2k$.

Donde:

$$\frac{l}{3} = \frac{m}{3} = \frac{n}{2}.$$

163. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais que satisfaça às condições seguintes:

a) Seja $\xi = 105^\circ$.

b) Seja tal que a projecção da bissectriz do ângulo $\widehat{x,y}$ seja perpendicular à projecção y' do eixo dos y .

164. Desenhar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais que satisfaça às condições seguintes:

a) Seja $\xi = 150^\circ$.

b) Seja tal que a projecção da bissectriz do ângulo $\widehat{x,y}$ seja perpendicular à projecção x' do eixo dos x .

165. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x o ponto A , sendo $O'A' = 3$ cms.; no eixo dos y , o ponto B , sendo $O'B' = 1$ cm.; no eixo dos z , o ponto C , sendo $O'C' = 2$ cms.

Designar por D o ponto do plano yz que tem ordenada igual à do ponto B e cota (coordenada) igual à de C ; depois, por p a paralela ao eixo dos x tirada por D e por E , o ponto de p que tem abscissa igual à do ponto A que foi fixado no eixo dos x .

Determinar os traços do plano de nível que passa pelo ponto E .

166. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x , dois pontos X e L , sendo $O'X' = 6$ cms. e $O'L' = 3$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 4$ cms.; no eixo dos z , os dois pontos Z e M , sendo $O'Z' = 4$ cms. e $O'M' = 6$ cms.

Determinar e designar por $A \equiv (A', A'_p)$ o ponto que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, depois, e designar por $N \equiv (N', N'_p)$ o ponto cuja projecção N' se sobrepõe a A' e que tem a abscissa do ponto L fixado sobre o eixo dos x .

Determinar, também, e designar por $B \equiv (B', B'_p)$ o ponto que tem a mesma planta que N e a mesma cota (coordenada) que o ponto M fixado no eixo dos z .

Determinar, finalmente, os traços S , R e T da recta AB nos planos coordenados yz , zx e xy , respectivamente.

Nota: Para a resolução do problema, usar, como plano auxiliar, o plano que contém a recta AB e é paralelo ao eixo dos x .

167. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x , os pontos X e E , sendo $O'X' = 6$ cms. e $O'L' = 3$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 4$ cms.; no eixo dos z , os pontos Z e M , sendo $O'Z' = 10$ cms. e $O'M' = 4$ cms.

Determinar, depois, e designar por $A \equiv (A', A'_p)$ o ponto que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, também, e designar por $N \equiv (N', N'_p)$ o ponto cuja projecção N' se sobrepõe a A' e que tem a abscissa do ponto L fixado no eixo dos x .

Determinar, ainda, e designar por $B \equiv (B', B'_p)$ o ponto que tem a mesma planta que N e a mesma cota (coordenada) que o ponto M fixado no eixo dos z .

Determinar, finalmente, os traços nos planos coordenados, yz , zx e xy do plano que admite a recta AB como recta de maior declive (em relação ao plano de projecção).

168. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x , os pontos X e L , sendo $O'X' = 6$ cms. e $O'L' = 3$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 4$ cms.; no eixo dos z , os pontos Z e M , sendo $O'Z' = 4$ cms. e $O'M' = 8$ cms.

Determinar, depois, e designar por $A \equiv (A', A'_p)$ o ponto que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, também, e designar por $N \equiv (N', N'_p)$ o ponto cuja projecção N' se sobrepõe a A' e que tem a abscissa do ponto L fixado no eixo dos x .

Determinar, ainda, e designar $B' \equiv (B', B'_p)$ o ponto que tem para planta a planta de N e para cota a cota do ponto M fixado no eixo dos z (cota, no sentido de coordenada).

Determinar, finalmente, os traços nos planos coordenados, yz , zx e xy , do plano perpendicular à recta AB tirado por N .

169. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x , os pontos X e L , sendo $O'X' = 6$ cms. e $O'L' = 3$ cms.; no eixo dos y , os pontos Y e M ; sendo $O'Y' = 4$ cms. e $O'M' = 6$ cms.; no eixo dos z , os pontos Z e N , sendo $O'Z' = 4$ cms. e $O'N' = 6$ cms.

Determinar, depois, e designar por $A \equiv (A', A'_p)$ o ponto que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, também, e designar por $Q \equiv (Q', Q'_p)$ o ponto cuja projecção Q' se sobrepõe a A' e que tem a abscissa do ponto L fixado no eixo dos x .

Determinar, ainda, e designar por $B \equiv (B', B'_p)$ o ponto que tem para planta a planta de Q e para cota a cota do ponto N fixado no eixo dos z (cota, no sentido de coordenada).

Determinar, finalmente:

a) O ponto $D \equiv (D', D'_p)$ da recta AB que tem para ordenada a ordenada do ponto M fixado no eixo dos y .

b) O ponto $E \equiv (E', E'_p)$ da mesma recta AB que tem abscissa e ordenada iguais em valor absoluto, mas de sinais contrários.

170. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Fixar: no eixo dos x , os pontos X e L , sendo $O'X' = 6$ cms. e $O'L' = 3$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 4$ cms.; no eixo dos z , os pontos Z e M , sendo $O'Z' = 4$ cms. e $O'M' = 6$ cms.

Determinar o ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, depois, o ponto $N \equiv (N', N'_p)$ cuja projecção N' se sobrepõe a A' e que tem a abscissa do ponto L fixado no eixo dos x .

Determinar, também, o ponto $B \equiv (B', B'_p)$ que tem para planta a planta de N e para cota a cota do ponto M fixado no eixo dos z (cota, no sentido de coordenada).

Determinar, finalmente:

a) O ponto $R \equiv (R', R'_p)$ da recta AB cuja cota (cota no sentido de distância ao plano de projecção) seja a mesma que a de origem das coordenadas.

b) O ponto $S \equiv (S', S'_p)$ da mesma recta AB cuja cota (cota no sentido de distância ao plano de projecção) exceda a cota da origem em 9 cms.

171. Fixar uma projecção ortogonal isométrica $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois:

No eixo dos x , os pontos A e X , sendo $O'A' = 6$ cms. e $O'X' = 3$ cms.;

No eixo dos y , os pontos B e Y , sendo $O'B' = 3$ cms. e $O'Y' = 5$ cms.;

No eixo dos z , os pontos D e Z , sendo $O'D' = 4$ cms. e $O'Z' = 8$ cms.

Determinar:

a) O ponto $C \equiv (C', C'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto X ; a sua ordenada, igual à do ponto Y ; a sua cota (coordenada), igual à do ponto Z .

b) O ponto $E \equiv (E', E'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto X ; a sua ordenada, igual à do ponto Y ; a sua cota (coordenada), nula.

c) O ponto $I \equiv (I', I'_p)$ de intersecção da recta DE com o plano ABC .

d) Pontuar a figura supondo o plano considerado reduzido ao triângulo ABC .

172 Fixar uma projecção ortogonal isométrica $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois:

No eixo dos x , os pontos A e X , sendo $O'A' = 6$ cms. e $O'X' = 3$ cms.;

No eixo dos y , os pontos B e Y , sendo $O'B' = 3$ cms. e $O'Y' = 5$ cms.;

No eixo dos z , os pontos D e Z , sendo $O'D' = 4$ cms. e $O'Z' = 8$ cms.

Determinar :

a) O ponto $C \equiv (C', C'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto X ; a sua ordenada, igual à do ponto Y ; a sua cota (coordenada), igual à do ponto Z .

b) O ponto $E \equiv (E', E'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto A ; a sua ordenada, nula; a sua cota (coordenada), igual à do ponto D .

c) A intersecção i dos planos ABC e DEY .

d) Pontuar a figura supondo os planos reduzidos, respectivamente, aos triângulos ABC e DEY .

173. Fixar uma projecção ortogonal isométrica $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois :

No eixo dos x , os pontos A e X , sendo $O'A' = 6$ cms. e $O'X' = 3$ cms.;

No eixo dos y , os pontos B e Y , sendo $O'B' = 3$ cms. e $O'Y' = 5$ cms.;

No eixo dos z , os pontos D e Z , sendo $O'D' = 4$ cms. e $O'Z' = 8$ cm.

Determinar :

a) O ponto $C \equiv (C', C'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto X ; a sua ordenada, igual à do ponto Y ; a sua cota (coordenada), igual à do ponto Z .

b) O ponto $E \equiv (E', E'_p)$, sendo a sua abscissa igual à do ponto A ; a sua ordenada, igual à do ponto B ; a sua cota (coordenada) nula.

c) O ponto F do eixo dos x , tal que o plano DEF seja perpendicular ao plano ABC .

d) Determinar, finalmente, a intersecção dos planos ABC e DEF e pontuar a figura supondo os planos reduzidos, respectivamente, aos triângulos ABC e DEF .

174. Desenhar um triângulo XYZ , sendo $XY = 7$ cms., $XZ = 5$ cms., $YZ = 6$ cms.

Determinar :

a) A projecção do sistema de eixos ortogonais que admite XYZ como triângulo axonométrico.

b) A projecção W' do ponto do eixo dos z cuja cota excede em 4 cms. a cota da origem do sistema (cota, no sentido de distância ao plano de projecção).

c) A projecção do cubo que tem as arestas dirigidas segundo os eixos do sistema, com um vértice na origem e outro no ponto W .

175. Desenhar um triângulo XYZ , sendo: $XY = 12$ cms., $\hat{X} = 30^\circ$, $\hat{Y} = 45^\circ$.

Construir a projecção ortogonal do sistema de eixos ortogonais que admite XYZ como triângulo axonométrico.

Determinar, finalmente, a projecção do cubo assim definido:

a) Três das suas arestas estão nos eixos do sistema considerado.

b) O vértice oposto à origem das coordenadas está no plano XYZ .

176. Fixar uma projecção ortogonal, monodimétrica, dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\zeta = 135^\circ$.

Determinar a projecção do cubo assim definido:

a) Tem um vértice na origem das coordenadas.

b) As arestas que partem do vértice que fica na origem das coordenadas estão nos eixos coordenados.

c) A cota do vértice oposto ao vértice, que fica na origem das coordenadas, excede em 10 cms. a cota da origem das coordenadas (cota, no sentido de distância ao plano de projecção).

177. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ monodimétrica dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$ sendo $\zeta = 135^\circ$.

Fixar no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 6$ cms.

Determinar o ponto $A \equiv (A', A'_p)$, sobrepondo-se a projecção A' à projecção O' da origem das coordenadas e tendo a planta A_p a mesma abscissa que o ponto X .

Determinar, finalmente, a projecção do cubo assim definido:

a) Tem um vértice na origem das coordenadas e as arestas que partem deste vértice sobre os eixos coordenados.

b) O vértice oposto ao que fica na origem das coordenadas tem a mesma cota que o ponto $A \equiv (A', A'_p)$ (cota, no sentido de distância ao plano de projecção).

178. Fixar uma projecção ortogonal, monodimétrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\zeta = 135^\circ$.

Fixar, depois, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 5$ cms.

Determinar:

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$, sendo a projecção A' sobreposta à projecção O' da origem das coordenadas e tendo a planta A_p a mesma abscissa que o ponto X .

b) A recta do nível $h \equiv (h', h'_p)$ que passa pelo ponto $A \equiv (A', A'_p)$ e é paralela ao plano yz .

c) A projecção do cubo assim definido:

Tem as arestas paralelas aos eixos coordenados e a origem das coordenadas para um dos seus vértices.

O vértice oposto ao que fica na origem das coordenadas pertence ao plano tirado pela recta $h \equiv (h', h'_p)$ paralelamente ao eixo dos x .

179. Fixar um triângulo equilátero XYZ que tenha 5 cms. de lado.

Determinar a projecção ortogonal $O'x'y'z'$ do sistema de eixos ortogonais que admite o triângulo XYZ como triângulo axonométrico.

Determinar, depois, as projecções q' e r' dos traços q e r nos planos yz e zx do plano α simétrico do plano xy relativamente ao plano do triângulo XYZ .

Nota: Do plano pedido α conhece-se o traço no plano xy . Por outro lado, o plano pedido α contém o ponto $A \equiv (A', A'_p)$ simétrico da origem das coordenadas, relativamente ao plano XYZ .

Observe-se que a projecção A' cai na projecção O' da origem e que a cota (distância ao plano de projecção) de $A \equiv (A', A'_p)$ excede em tanto a cota do plano XYZ quanto a cota deste plano excede a cota da origem das coordenadas.

180. Desenhar um triângulo XYZ , sendo $XY = YZ = 5$ cms. e $XZ = 6$ cms.

Desenhar a projecção ortogonal do sistema de eixos ortogonais que admite o triângulo XYZ como triângulo axonométrico.

Determinar:

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ do plano XYZ cuja abscissa é igual à do ponto X e cuja ordenada é igual à do ponto Y .

b) A distância δ do ponto $A \equiv (A', A'_p)$ à origem do sistema.

181. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$ dum, sistema $Oxyz$ de eixos ortogonais.

Fixar, em seguida:

No eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 5$ cms.

No eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 3$ cms.

No eixo dos z , o ponto Z sendo $O'Z' = 4$ cms.

Determinar:

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

b) A recta $p \equiv (p', p'_p)$ que contém a origem das coordenadas, é paralela ao plano XYZ e intersecta a recta ZA .

182. Fixar uma projecção ortogonal isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois :

No eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms.

No eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.

No eixo dos z , os pontos Z , U e V , sendo $O'Z' = 6$ cms., $O'U' = 3$ cms. e $O'V' = 1$ cm.

Determinar :

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de U .

b) O ponto $B \equiv (B', B'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de V .

c) A recta $a \equiv (a', a'_p)$ paralela ao eixo dos x tirada por A .

d) A recta $b \equiv (b', b'_p)$ paralela ao eixo dos y tirada por B .

e) Finalmente, a recta $p \equiv (p', p'_p)$ que passa por Z e intersecta as duas rectas a e b .

183. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois :

No eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms.

No eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.

No eixo dos z , os pontos Z e U , sendo $O'Z' = 3$ cms. e $O'U' = 1$ cm.

Determinar :

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) nula.

b) O ponto $B \equiv (B', B'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada nula e a cota (coordenada) de U .

c) O ponto $C \equiv (C', C'_p)$ que tem a abscissa nula, a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

d) Finalmente, a projecção h' da recta de nível do plano ABC cuja cota excede, em 4 cms., a cota da origem das coordenadas.

184. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms ; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 3$ cms. ; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 5$ cms.

Determinar :

- a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .
- b) Finalmente, a projecção da recta de nível h que contém o ponto A e intersecta o eixo dos z .

185. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois, no eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 5$ cms. ; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms. ; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms. Desenhar, também, a perpendicular em O' a y' e designar esta perpendicular por h' e n'_p .

Determinar :

- a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .
- b) A projecção h'_p da planta da recta de nível que tem a cota (distância ao plano de projecção) do ponto A e se projecta em h' .
- c) A projecção n' da recta de nível que tem a cota do ponto A e cuja planta se projecta em n'_p .

186. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Desenhar a projecção da circunferência que é tangente aos eixos x e y , excedendo a cota (distância ao plano de projecção) do seu centro, em 3 cms., a cota da origem das coordenadas.

187. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 3$ cms. ; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms. ; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 2$ cms.

Determinar :

- a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de z .
- b) Em seguida, a projecção da circunferência que tem para centro o ponto A e é tangente ao eixo dos x .

188. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, no eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 8$ cms. ; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 7$ cms. ; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar a projecção da circunferência assim definida:

- a) Pertence ao plano XYZ .
- b) O seu centro fica no ponto de cruzamento das bissectrizes do triângulo XYZ .
- c) O seu diâmetro mede 5 cms.

189. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, o contorno da esfera E de raio igual a 4 cms. e que tem para centro a origem das coordenadas.

Fixar, também, no eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 3$ cms.

Determinar as projecções I' e J' dos pontos da esfera E que têm a abscissa de X e a ordenada de Y .

190. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, o contorno da esfera E de raio igual a 4 cms. e de centro na origem das coordenadas.

Fixar, ainda, no eixo dos y o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar:

a) A projecção A' do ponto A que tem abscissa nula, a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

b) Finalmente, as projecções I'_p e J'_p das plantas dos pontos da esfera E , os quais se projectam A' .

191. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 5$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar a distância δ do ponto Y do eixo dos y à recta ZX do plano zx .

192. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema $Oxyz$ de eixos ortogonais.

Fixar, depois, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 1$ cm.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar :

- a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$, que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .
- b) A projecção m' da recta m que passa pelo ponto A , é paralela ao plano xy e encontra o eixo dos z .
- c) A projecção n' da recta n que é de nível, passa pelo ponto A e é perpendicular à recta OA .
- d) Finalmente, o verdadeiro valor φ do ângulo que fazem as duas rectas m e n .

193. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema $Oxyz$ de eixos ortogonais.

Fixar, depois, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 1$ cm.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar :

- a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .
- b) A projecção m' da recta m que passa por A , encontra o eixo dos x e é paralela ao plano yz .
- c) A projecção n' da recta n que passa por A , encontra o eixo dos y e é paralela ao plano xz .
- d) Finalmente, o verdadeiro valor φ do ângulo que fazem as duas rectas m e n .

194. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Determinar o ângulo φ que fazem as rectas de maior declive do plano xy com as rectas de maior declive do plano yz (de maior declive relativamente ao plano de projecção).

195. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Determinar o ângulo φ que faz o plano xy com o plano α que admite o eixo dos x como recta de maior declive (de maior declive, relativamente ao plano de projecção).

196. Fixar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = \eta$ e $\zeta = \frac{3\pi}{4}$ radianos.

Determinar o ângulo φ que mede o diedro do plano xy com o plano que projecta o eixo dos x .

197. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, os pontos P , Q e R dos eixos x , y e z , respectivamente, pelas suas projecções P' , Q' e R' , sendo $O'P' = 6$ cms., $O'Q' = O'R' = 3$ cms.

Determinar o ângulo φ que o plano PQR forma com o plano xy .

198. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Fixar, depois, no eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 6$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar os traços p , q e r nos planos coordenados xy , yz e zx , respectivamente, do plano que bissecta os diedros obtusos formados pelo plano xy com o plano que admite a recta XZ como recta de maior declive (de maior declive em relação ao plano de projecção).

199. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Designar por p a recta do plano xy cuja projecção p' é a perpendicular em O' a x' .

Designar por q a recta do plano yz cuja projecção q' se sobrepõe a p' .

Determinar a projecção b'_p da planta duma das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas consideradas, p e q .

Nota: As rectas p e q passam por O e o plano a que pertencem é projectante. Essencialmente, o problema reduz-se a efectuar o rebatimento dum plano projectante e pode notar-se, ainda, que a recta q é de nível.

200. Fixar uma projecção ortogonal, $O'x'y'z'$, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois:

No eixo dos x , os pontos X e A , sendo $O'X' = 2$ cms. e $O'A' = 4$ cms.

No eixo dos y , os pontos Y , U e B , sendo $O'Y' = 4$ cms., $O'U' = 6$ cms. e $O'B' = 2$ cms.

No eixo dos z , os pontos Z e C , sendo $O'Z' = 5$ cms. e $O'C' = 3$ cms.

Determinar:

a) O ponto $M \equiv (M', M'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

b) O ponto $N \equiv (N', N'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de U e a cota (coordenada) de Z .

Determinar, finalmente, as projecções E' e F' dos pontos E e F da recta ON que distam do plano ABC tanto como dista o ponto M .

201. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, em seguida, uma recta $r \equiv (r', r'_p)$ que passe pela origem das coordenadas e seja r'_p perpendicular a x' e r' perpendicular a y' .

Determinar :

a) O ponto $M \equiv (M', M'_p)$ da recta r , tal que $O'M' = 2$ cms.

b) Os pontos U, V e W dos eixos x, y e z , respectivamente, tais que $OU = OV = OW = OM$.

202. Fixar uma projecção ortogonal, $O'x'y'z'$, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, depois :

No eixo dos x , o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms. ;

No eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 4$ cms. ;

No eixo dos z , os pontos Z e A , sendo $O'Z' = 5$ cms. e $O'A' = 6$ cms.

Determinar :

a) O ponto $B \equiv (B', B'_p)$ que tenha a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z ;

b) Finalmente, a distância δ do ponto A à recta OB .

203. Fixar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\xi = 105^\circ$ e $\eta = 120^\circ$.

Determinar :

a) Os vértices X, Y e Z dum triângulo axonométrico, excedendo a cota do seu plano, em 2 cms., a cota da origem das coordenadas.

b) Finalmente, a distância δ da origem das coordenadas ao centro da circunferência circunscrita ao triângulo XYZ .

204. Fixar uma projecção ortogonal $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 105^\circ$ e $\xi = 120^\circ$.

Fixar, em seguida, a recta $r \equiv (r', r'_p)$ que passa pela origem das coordenadas, sendo r' perpendicular a z' e r'_p perpendicular a x' .

Determinar :

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ da recta r cuja cota (distância ao plano de projecção), excede, em 6 cms., a cota da origem das coordenadas.

b) Finalmente, a distância δ do ponto A à origem das coordenadas.

205. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, em seguida, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 2$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 3$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar :

a) O ponto $E \equiv (E', E'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

b) Finalmente, os traços nos planos coordenados do plano que passa pelo ponto E e tem OE por eixo.

206. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, em seguida :

No eixo dos y , os pontos A e Y , sendo $O'A' = 3$ cms. e $O'Y' = 6$ cms.;

No eixo dos z , os pontos C e Z , sendo $O'C' = 4$ cms. e $O'Z' = 2$ cms.

Determinar :

a) O ponto $B \equiv (B', B'_p)$ de abscissa nula, de ordenada igual à de Y e de cota (coordenada) igual à de Z .

b) Finalmente, as projecções dos traços do plano que passa por C e é perpendicular à recta AB .

207. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar, em seguida, no eixo dos x o ponto A , sendo $O'A' = 6$ cms.

Determinar :

a) A recta $r \equiv (r', r'_p)$ que contém o ponto A , sendo r' perpendicular a y' e r'_p perpendicular a x' ,

b) A perpendicular comum $p \equiv (p', p'_p)$ à recta r e ao eixo dos z .

c) A distância δ entre a recta r e o eixo dos z .

208. Fixar uma projecção ortogonal, isométrica, dum sistema de eixos ortogonais.

Determinar a projecção dum triângulo ABC , que tenha os vértices A , B e C sobre os eixos coordenados x , y e z , respectivamente, e seja tal que $AB = 5$ cms., $AC = 6$ cms. e $BC = 7$ cms.

209. Fixar uma projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\eta = 120^\circ$ e $\xi = 105^\circ$.

Determinar:

a) O contorno da esfera de centro na origem das coordenadas e de raio igual a 4 cms.

b) As projecções das secções principais da esfera.

Nota: Por secções principais entende-se as secções feitas pelos planos coordenados.

210. Fixar uma projecção ortogonal, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 120^\circ$ e $\xi = 105^\circ$.

Fixar, em seguida, no eixo dos x o ponto X , sendo $O'X' = 5$ cms.; no eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 2$ cms.; no eixo dos z , o ponto Z , sendo $O'Z' = 3$ cms.

Determinar:

a) O ponto $A \equiv (A', A'_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) de Z .

b) O contorno da esfera que tem para centro a origem das coordenadas e passa pelo ponto A .

c) O contorno da esfera que tem para centro o ponto A e é tangente ao plano xy .

d) Finalmente, a projecção da intersecção das duas esferas consideradas.

Axonometria paralela

Em *projecção ortogonal*, se um dos eixos coordenados for projectante (isto é, perpendicular ao plano de projecção), as projecções dos outros dois eixos são, então, rectas perpendiculares.

Em *projecção paralela*, semelhante condição não tem que ser satisfeita. Em *projecção paralela*, se um dos eixos for projectante (isto é, tiver a direcção da projecção), as projecções dos outros dois eixos podem ser duas rectas quaisquer, desde que distintas, tomadas no plano de projecção; e, quando estas sejam perpendiculares, a projecção é, então, ortogonal.

O caso de a projecção ter a direcção de um dos eixos coordenados, caso de excepção, em que a projecção de um dos eixos se reduz a um ponto, deve, porém, ser excluído.

Não se considera nem interessa a hipótese de a projecção de um dos eixos coordenados se reduzir a um ponto.

Em *projecção ortogonal*, quando um dos planos coordenados for projectante (isto é, perpendicular ao plano de projecção), as projecções dos eixos situados em tal plano sobrepõem-se numa mesma recta, e a projecção do terceiro eixo é perpendicular a esta recta.

Em *projecção paralela*, se um dos planos coordenados for projectante (isto é, contiver a direcção da projecção), as projecções dos eixos situados em tal plano sobrepõem-se, ainda, numa mesma recta; mas, a projecção do terceiro eixo pode ser qualquer recta, desde que distinta dessa recta; e mesmo a hipótese de a projecção do terceiro eixo ser perpendicular à recta em que se sobrepõem as projecções dos outros dois não implica que a projecção seja, necessariamente, ortogonal.

Em *projecção ortogonal*, se nenhum dos planos coordenados for projectante (isto é, perpendicular ao plano de projecção), as projecções dos eixos são rectas distintas, concorrentes num mesmo ponto, não sendo duas quaisquer perpendiculares e satisfazendo à condição de qualquer das projecções ficar contida na *região angular obtusa* (não na região angular aguda) determinada pelas outras duas.

Em *projecção paralela*, não sucede outro tanto. Em *projecção paralela*, duas das projecções podem ser ou não perpendiculares e qualquer das projecções pode encontrar-se, indiferentemente, na região angular obtusa, aguda ou rectangular determinada pelas outras duas.

Temos pois que:

Em projecção paralela, três rectas x' , y' e z' tomadas no plano de projecção, concorrentes num mesmo ponto, de resto quaisquer, podem ser consideradas como projecção paralela dos eixos x , y e z , respectivamente, dum sistema de eixos coordenados ortogonais.

Em *projecção ortogonal*, excluindo a hipótese de um dos planos coordenados ser projectante, ou seja de não serem todas distintas as projecções dos eixos, a projecção do sistema determina a sua posição no espaço, isto é, ficam determinados pela projecção

os ângulos que os eixos e, consequentemente, os planos coordenados formam com o plano de projecção.

Por semelhante motivo, em projecção ortogonal, a partir da projecção $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, podem ser propostos, tratados e resolvidos problemas geométricos de qualquer natureza, de incidência ou métricos, e estes quer de grandeza relativa quer de grandeza absoluta.

Em *projecção paralela*, não sucede o mesmo :

A projecção não determina a posição do sistema no espaço.

Em *projecção paralela*, com o ser fixada a projecção $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, não segue que se possam formular questões de caracter métrico que não sejam relativas a simples *paralelismo* (que em última análise se reduzem a questões de *incidência*) ou de simples transporte sobre uma mesma recta ou duma recta para outra que lhe seja paralela.

Para se poderem formular e tratar questões métricas de caracter geral — perpendicularidade, ângulos, comparação de segmentos, distâncias — torna-se necessário impor novos elementos, a juntar à projecção do sistema considerado, de tal modo que, com esses elementos, se possa, naturalmente, determinar a posição do sistema no espaço ; isto é, tais que, com eles, fiquem determinados os ângulos que os eixos e, consequentemente, os planos coordenados do sistema considerado fazem com o plano de projecção.

Continuamos a designar por ξ , η e ζ , respectivamente, os ângulos $\widehat{y'z'}$, $\widehat{z'x'}$ e $\widehat{x'y'}$ que formam, duas a duas, as projecções dos eixos do sistema; por γ e φ , a inclinação e rotação do sistema; por α , β e γ , os ângulos de declive dos eixos x , y e z , respectivamente.

Continuamos, também, a designar pelas letras L , M e N os pontos dos eixos x , y e z , respectivamente, que ficam a igual distância — *a unidade de comprimento* — da origem do sistema — $OL = OM = ON$ — e por l , m e n , os comprimentos das projecções dos segmentos OL , OM e ON — $l = O'L'$, $m = O'M'$ e $n = O'N'$.

Diremos, ainda, que a projecção é *isométrica* quando for $l = m = n$; que é *monodimétrica*, quando dois dos comprimentos l , m e n forem iguais; que é *anisométrica*, quando forem todos diferentes.

Designamos, como em axonometria ortogonal, pelo nome de *triângulo axonométrico*, um triângulo XYZ , cujos vértices X , Y e Z estejam sobre os eixos coordenados x , y e z , respectivamente, e o seu plano seja paralelo ao plano de projecção.

Damos o nome de *triângulo normal* a todo o triângulo PQR

cujos vértices estejam nos eixos e cujo plano seja normal à direcção da projecção considerada.

Em projecção ortogonal, triângulo normal coincide com triângulo axonométrico.

Uma projecção paralela é ortogonal quando um triângulo normal seja igualmente axonométrico.

O resultado fundamental que se estabelece em axonometria paralela é constituído pelas proposições seguintes:

Fixada uma projecção paralela, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais e a projecção $P'Q'R'$ dum triângulo normal, fica determinada a posição do sistema. Podemos determinar os ângulos que os eixos formam com o plano de projecção.

Fixada uma projecção paralela, $O'x'y'z'$, dum sistema de eixos ortogonais juntamente com as projecções L' , M' e N' dos pontos L , M e N a igual distância da origem, fica igualmente, determinada a posição do sistema e poderemos determinar a direcção da projecção e os ângulos que os eixos formam com o plano de projecção.

Esta segunda proposição constitui, de certo modo, o teorema de *Polke*.

As duas proposições, de certo modo, equivalem-se.

Nos exercícios que vamos tratar procuramos esclarecer a teoria que fica apontada.

Exercícios resolvidos:

1 — Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, sendo a projecção x' sobreposta a z' e y' perpendicular às projecções x' e z' (fig. 68).

Fixar, em seguida:

No eixo dos x , os pontos X e B , sendo $O'X' = 3$ cms. e $O'B' = 6$ cms.;

No eixo dos y , o ponto Y , sendo $O'Y' = 9$ cms.;

No eixo dos z , os pontos Z e A , sendo $O'Z' = 4$ cms. e $O'A' = 8$ cms.

Determinar o ponto $T \equiv (T', T''_p)$ que tem a abscissa de X , a ordenada de Y e a cota (coordenada) nula e traçar a recta ZT .

Determinar, finalmente:

a) As projecções U' e V' dos pontos U e V que dividem o segmento ZT em três partes iguais;

b) As projecções das rectas que passam pelos pontos U , V e T e intersectam a recta AB e o eixo dos y .

Res.: Pela sua natureza, o problema não impõe que sejam fixados outros elementos que não seja a simples projecção do sistema.

a) Determinação das projecções U' e V' dos pontos U e V . O problema de dividir um segmento em partes iguais, em projecção paralela, é trivial e não merece, mesmo, referência especial. Em projecção paralela, é mantida a razão de segmentos duma mesma

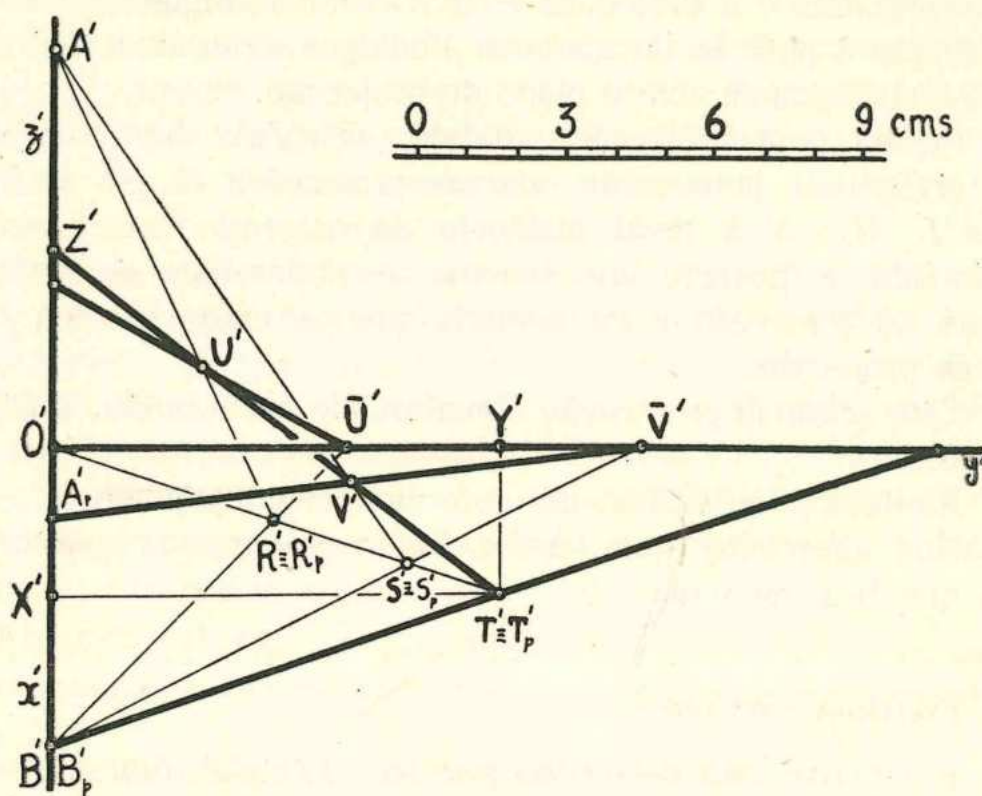


Fig. 68

recta ou de rectas paralelas e, consequentemente, segmentos iguais duma mesma recta ou de rectas paralelas projectam-se em segmentos iguais.

b) Determinação das rectas que passam pelos pontos U , V e T .

A recta tirada pelo ponto T obtém-se, unindo, simplesmente, este ponto ao ponto B . De facto, a recta TB está no plano xy e intersecta, portanto, o eixo dos y .

Recta tirada por U . Esta recta é a intersecção dos planos UAB e Uy . Determinou-se o ponto $\bar{U}$ de intersecção do eixo dos y com o plano UAB e, para tanto, procurou-se o traço BR do plano UAB no plano xy , que se obteve tomando a recta AU do plano UAB e

determinando o seu traço, $R \equiv (R', R'_p)$, no plano xy . A recta BR intersecta o eixo dos y no ponto $\bar{U}$.

De maneira análoga se construiu a recta tirada por V . Tomou-se a recta AV do plano VAB e determinou-se o seu traço, $S \equiv (S', S'_p)$, no plano xy . A recta BS intersecta o eixo dos y no ponto $\bar{V}$ e a recta pedida é a recta $V\bar{V}$.

II — Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais, sendo $\eta = 135^\circ$ e $\xi = 90^\circ$ (fig. 69 (a)).

Fixar, também, no eixo dos x o ponto P , sendo $O'P' = 9$ cms.; no eixo dos y , o ponto Q , sendo $O'Q' = 4$ cms.; no eixo dos z , o ponto R , sendo $O'R' = 7$ cms.

Sendo PQR um triângulo normal, determinar:

a) A projecção n' da recta de nível n que pertence ao plano do triângulo normal PQR e passa pelo vértice R deste triângulo.

b) O ângulo φ que o plano PQR faz com o plano de projecção.

c) O ângulo α que o eixo dos x forma com o plano de projecção (ângulo de declive, do eixo dos x).

d) O verdadeiro comprimento do segmento OP .

e) O triângulo axonométrico XYZ com o vértice Y no ponto Q .

Res.: Em projecção ortogonal — e falando de modo geral — a projecção dum sistema de eixos ortogonais determina a sua posição no espaço. Outro tanto não sucede em projecção paralela. As situações são, também, inteiramente diferentes, num e noutro caso, e estranho seria, pelo contrário, que o resultado que se apresenta em projecção ortogonal se verificasse, igualmente, no caso mais geral de projecção paralela.

Com afirmar-se projecção ortogonal, afirma-se e caracteriza-se, inteiramente, uma forma de projecção; fica determinada a direcção em que a projecção é feita, que é a direcção normal ao plano de projecção.

Outro tanto não sucede com afirmar-se, simplesmente, projecção paralela. Fica indeterminada a direcção em que a projecção é feita, que pode ser qualquer direcção, com a condição, apenas, de não ser paralela ao plano de projecção.

Para estender o resultado verificado em projecção ortogonal ao caso mais geral de projecção simplesmente paralela, devemos, de qualquer modo, fixar a direcção da projecção; fixada a direcção da projecção, de esperar é que surja, então, a analogia, e a teoria, se generalize.

Do triângulo PQR conhece-se a projecção $P'Q'R'$ e impõe-se que esta projecção se faz por meio de projectantes perpendiculares ao plano do triângulo.

Consideremos, então, a perpendicular ao plano PQR tirada pela origem O do sistema considerado e designemos por O_0 o ponto de intersecção desta perpendicular com o plano PQR .

Visto que O_0 e a origem O do sistema estão numa mesma projectante, a projecção O'_0 de O_0 sobrepõe-se à projecção O' da origem do sistema.

Designemos por x_0 , y_0 e z_0 as rectas que unem o ponto O_0 aos vértices P , Q e R , respectivamente, do triângulo PQR . As rectas x_0 , y_0 e z_0 constituem uma projecção ortogonal, feita sobre o plano PQR , dos eixos x , y e z do sistema considerado e são, por isso, alturas do triângulo PQR .

Como a projecção de O_0 se sobrepõe a O' as projecções de x_0 , y_0 e z_0 sobrepõem-se às projecções x' , y' e z' dos eixos x , y e z , respectivamente, [$x'_0 \equiv x'$, $y'_0 \equiv y'$, $z'_0 \equiv z'$].

Por consequência:

Conhecemos uma projecção paralela do triângulo normal PQR e das suas alturas.

Ora, uma projecção paralela dum triângulo e das suas alturas determina a forma do triângulo projectado. Temos, pois, determinada a forma do triângulo normal PQR .

Por outro lado, o triângulo PQR é projecção ortogonal do triângulo $P'Q'R'$ e, assim, conhecida a forma do triângulo PQR , as suas dimensões são determinadas pelo triângulo $P'Q'R'$. Pode construir-se, pois, o triângulo normal PQR .

A construção do triângulo PQR encontra-se realizada na fig. 69 (b) e foi obtida pelas seguintes operações:

I — Transformou-se por homologia afim o triângulo $P'Q'R'$ num triângulo $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$ que tenha para alturas as rectas homólogas de x'_0 , y'_0 e z'_0 . Para eixo desta homologia foi tomada a recta $P'Q'$.

II — Determinaram-se as direcções perpendiculares que se mantêm perpendiculares.

Uma destas direcções é a direcção da recta $R'M'$; a sua homóloga, a da recta $\bar{R}\bar{M}$; por $M' \equiv \bar{M}$, indica-se um ponto do eixo, $P'Q' \equiv \bar{P}\bar{Q}$, da homologia.

III — Determinou-se qual das direcções deve ser paralela ao plano de projecção. Para tanto, tomou-se $\bar{R}\bar{N}$ perpendicular e igual a $\bar{R}\bar{M}$ e determinou-se o original N' de $\bar{N}$. Verifica-se que se tem $R'N' > R'M'$. Resulta, portanto, que a direcção paralela ao plano de PQR é a direcção de $R'M'$.

IV — Sobre $\bar{R}\bar{M}$ tomou-se o ponto M , sendo $\bar{R}M = R'M'$ e considerou-se a homotetia que tem para centro $\bar{R}$ e transforma $\bar{M}$ em M . Esta homotetia transforma o triângulo $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$ no triângulo PQR . Assim se constrói o triângulo PQR .

A projecção n' da recta de nível n do plano PQR , que passa pelo vértice R do triângulo normal, sobrepõe-se a $R'M'$.

b) Ângulo φ do plano PQR com o plano de projecção.

Temos que o triângulo $P'Q'R'$ se projecta ortogonalmente no triângulo PQR . Tanto basta para que esteja unívocamente fixado, e, portanto, possa ser pedido, o ângulo que formam os planos dos triângulos.

Para o determinar, basta tomar no plano do triângulo $P'Q'R'$ (o plano de projecção) uma recta de *maior declive* e procurar o ângulo que esta recta forma com a sua projecção ortogonal sobre o plano PQR .

Temos já construída uma tal recta, que é a recta $R'N'$.

Temos, também, determinado que o segmento $O'N'$ se projecta ortogonalmente no plano PQR em segmento igual ao segmento $RM = R'M'$.

Construamos (v. fig. 69 (d)) um triângulo ABC , rectângulo em A , com a hipotenusa BC igual a $R'N'$ (segmento projectado) e o cateto AB igual a $RM = R'M'$ (tamanho da projecção).

O ângulo φ pedido, que forma o plano do triângulo normal PQR com o plano de projecção, é igual ao ângulo em B do triângulo ABC .

c) Ângulo α que o eixo dos x forma com o plano de projecção.

O processo normal de determinar o ângulo, que uma recta faz com um plano, consiste em procurar o ângulo da recta com uma perpendicular ao plano e tomar, depois, o complemento do ângulo obtido.

Na alínea precedente, determinámos o ângulo φ que o plano de projecção forma com o plano PQR . Temos, pois, que o ângulo ψ que as perpendiculares ao plano de projecção fazem com o plano PQR é o complemento de φ , isto é o ângulo em C do triângulo ABC (fig. 69 (d)).

Temos, também, que as perpendiculares ao plano de projecção se projectam ortogonalmente sobre o plano PQR em rectas perpendiculares à recta RM .

Estão, assim, determinadas as rectas perpendiculares ao plano de projecção.

Tiremos pela origem O do sistema a perpendicular OT ao plano de projecção e determinemos o seu traço T no plano PQR .

Temos já determinada e designada por O_0 a projecção ortogonal da origem O do sistema sobre o plano PQR . Resulta que $O_0 T$ é perpendicular a RM , e basta, portanto, determinar o tamanho de $O_0 T$.

O tamanho de $O_0 T$ pode ser, assim, obtido.

Procurámos a cota da origem O do sistema (cota em relação ao plano PQR). Esta cota foi obtida na fig. 69 (c) por meio do rebatimento feito sobre o plano PQR do plano projectante do eixo dos z (projectante sobre o plano PQR , isto é perpendicular a este plano). O rebatimento de O está em (O) e, assim, a cota de O é igual ao segmento $O_0 (O)$.

Conhecida a cota de O , determinou-se o tamanho de OT e da projecção $O_0 T$. Tomou-se (fig. 69 (d)) no cateto AB o ponto D tal que $BD = O_0 (O)$. Tirou-se $DE // AC$ e determinou-se a intersecção E de DE com a hipotenusa BC .

Resulta $OT = BE$ e $O_0 T = DE$.

Determinado o traço T (fig. 69 (b)), consideremos o triângulo POT . O ângulo em O deste triângulo é, precisamente, o ângulo que o eixo dos x faz com as perpendiculares ao plano de projecção.

Construamos o triângulo POT , procurando o tamanho dos seus lados.

O lado PT encontra-se dado em verdadeira grandeza na fig. 69 (b). O lado OT é igual ao segmento BE apresentado na fig. 69 (d). O lado PO obtém-se construindo o triângulo rectângulo $PO_0 O$, o que foi feito na fig. 69 (e).

O triângulo POT acha-se construído na fig. 69 (e) e, também, determinado o complemento do ângulo em O que é o ângulo pedido α do eixo dos x com o plano de projecção.

d) Verdadeiro comprimento de OP .

Ao tratar a alínea precedente, foi já determinado o verdadeiro comprimento de OP .

e) Triângulo axonométrico XYZ .

O plano do triângulo axonométrico está, assim, determinado:

I—Contém a recta de nível n_1 do plano PQR , tirada pelo ponto Q ou seja a paralela tirada por este ponto à recta n , já construída.

II—É paralelo à recta $R'N'$ do plano de projecção.

Vamos considerar a recta m do plano XYZ paralela a $R'N'$

cuja projecção ortogonal m_0 , sobre o plano PQR , contém o ponto O_0 , e vamos procurar o seu traço H no plano xy (fig. 69 (c)). Este ponto H pode obter-se por um rebatimento do plano que projecta ortogonalmente a recta m sobre o plano PQR . Nenhuma dificuldade há em executar este rebatimento, pois já temos determinados a cota da origem O do sistema e o ângulo φ de m com o

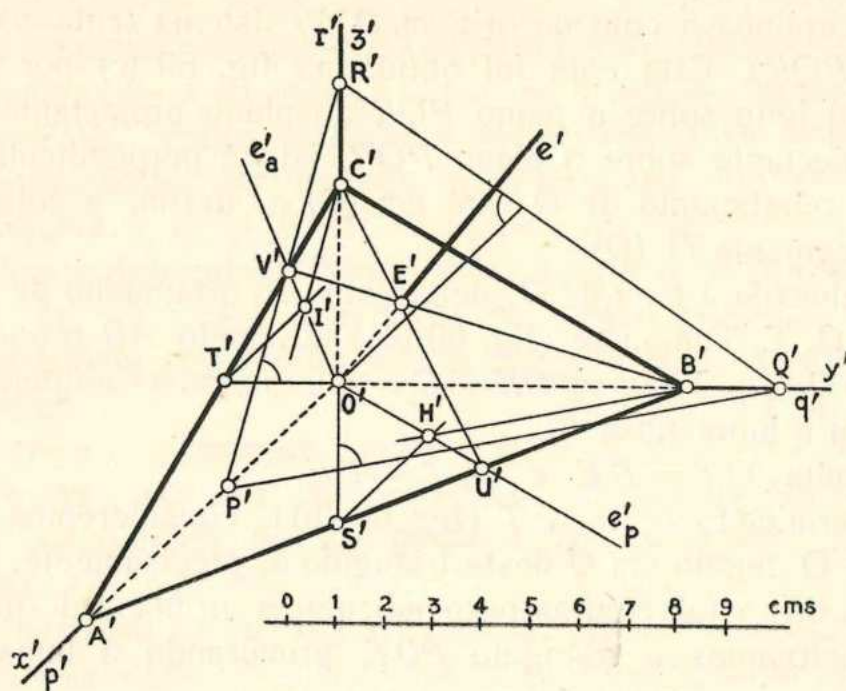


Fig. 70

plano PQR . Deve notar-se que o ponto F de intersecção de m_0 com n_1 é o traço de m sobre o plano PQR .

Determinado o ponto H segue a projecção ortogonal $X_0 Y_0 Z_0$ do triângulo XYZ sobre o plano PQR (fig. 69 (c)).

O tamanho de $P'X \equiv P'X'$ — a marcar na projecção x' do eixo dos x (fig. 69 (a)) — obtém-se: tomando em PO_0 (fig. 69 (b)) PX_0 ; procurando, em seguida, o ponto $\bar{X}$, homólogo de X_0 na homotetia de centro $R \equiv \bar{R}$ e que transforma M em $\bar{M}$; finalmente, o homólogo $X' \equiv X$ de $\bar{X}$ na homologia afim de eixo $P'Q'$ e que transforma $\bar{R} \equiv R$ em R' .

III — Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 135^\circ$ e $\xi = 90^\circ$ (fig. 70).

Fixar, também, no eixo dos x , os pontos P e A , sendo $O'P' = 3$ cms. e $O'A' = 7$ cms.; no eixo dos y , os pontos Q e B , sendo $O'Q' = 9$ cms. e $O'B' = 7$ cms.; no eixo dos z , os pontos R e C , sendo $O'R' = 6$ cms. e $O'C' = 4$ cms.

Impondo que PQR seja triângulo normal:

Determinar a projecção — e' — do eixo — e — do plano ABC e a projecção E' do seu pé E .

Res.: O eixo do plano ABC é a perpendicular a este plano baixada da origem das coordenadas.

Designemos por p a recta do plano yz cuja projecção p' se sobrepõe a x' ; por q , a recta do plano zx cuja projecção q' se sobrepõe a y' ; por r , a recta do plano xy cuja projecção r' se sobrepõe a z' .

O plano xp é perpendicular ao plano yz . É, também, perpendicular ao plano do triângulo PQR porque o plano xp é projectante e se impõe que PQR seja triângulo normal.

Resulta que o plano xp é perpendicular a QR e, portanto, que as rectas p e QR são perpendiculares.

De igual modo se conclui que q é perpendicular a RP e r perpendicular a PQ .

Vamos determinar as projecções ortogonais e_p e e_a do eixo e do plano ABC sobre os planos coordenados xy e xz respectivamente. [A projecção e_p é a *planta* do eixo. A projecção e_a pode ser designada pelo nome de *alçado*].

Começemos por determinar a projecção e'_p de e_p .

A recta e_p é perpendicular a AB . A determinação da projecção e'_p constitui, pois, um problema de perpendicularidade no plano xy . Lembra aplicar o método das alturas; isto é, construir um triângulo, do qual possamos traçar duas das suas alturas e que tenha para terceira altura a recta e_p . Temos que o eixo dos x é perpendicular ao eixo dos y e que a recta r é perpendicular a PQ . Estamos habilitados a construir um semelhante triângulo.

Tomemos o triângulo do plano xy que tem para lados o eixo dos x , a recta r e AB . Um dos seus vértices é a origem O do sistema; um outro, o ponto B . Designemos por S o terceiro vértice, isto é, o ponto de intersecção de r com AB . A projecção S' do vértice S está no ponto de intersecção de $z' \equiv r'$ com $A'B'$. A altura relativa ao vértice B é paralela a PQ ; a altura relativa ao vértice S é paralela ao eixo dos y ; a altura relativa ao vértice O é a recta e_p procurada. Para determinar a projecção H' do ponto H de cruzamento das alturas, basta traçar $B'H' \parallel P'Q'$ e $S'H' \parallel x'$ e determinar a intersecção das rectas obtidas.

Unindo O' a H' , temos a projecção procurada e'_p de e_p .

A determinação da projecção e'_a de e_a pode efectuar-se por igual processo. Temos apenas que permutar o plano xy com o plano xz , ou seja o eixo dos y com o eixo dos z .

Tomemos o triângulo do plano xz que tem para lados o eixo dos x , a recta q e AC . Um dos seus vértices é a origem O do sistema; um outro, o ponto C . Designemos por T o terceiro vértice, isto é, o ponto de intersecção de q com AC . A projecção T' do vértice T está no ponto de intersecção de $y' \equiv q'$ com $A'C'$. A altura relativa ao vértice C é paralela a PR ; a altura relativa ao vértice T é paralela ao eixo dos y ; a altura relativa ao vértice O é a recta e_a procurada. Para determinar a projecção I' do ponto I de cruzamento das alturas, basta traçar $C'I' \parallel P'R'$ e $T'I' \parallel x'$ e determinar a intersecção das rectas obtidas.

Unindo O' a I' , temos a projecção procurada e'_a de e_a .

O eixo e do plano ABC é a intersecção dos planos ze_p e ye_a .

Designemos por U o ponto de intersecção de e_p com AB ; por V , o ponto de intersecção de e_a com AC . A projecção U' de U fica na intersecção de e'_p com $A'B'$; a projecção V' de V , na intersecção de e'_a com $A'C'$. O plano ABC intersecta os planos ze_p e ye_a segundo as rectas CU e BV , respectivamente. O pé E do eixo fica no ponto de intersecção das rectas CU e BV .

A projecção E' do pé E do eixo obtém-se determinando a intersecção de $C'U'$ com $B'V'$.

A projecção e' do eixo e do plano ABC obtém-se, em seguida, unindo O' com E' .

IV — *Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 135^\circ$ e $\xi = 90^\circ$ (fig. 71).*

Fixar, também, no eixo dos x o ponto L , sendo $O'L' = 7$ cms.; no eixo dos y , o ponto M , sendo $O'M' = 7$ cms.; no eixo dos z , o ponto N , sendo $O'N' = 4$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos que fiquem a igual distância da origem (a unidade de comprimento):

Determinar a projecção $P'Q'R'$ do triângulo normal PQR cujo vértice R se sobrepõe ao ponto N fixado no eixo dos z .

Res.: Designemos, como no exercício anterior, por p , q e r as rectas dos planos coordenados yz , zx e xy cujas projecções p' , q' e r' se sobrepõem a x' , y' e z' , respectivamente.

Como se viu no exercício anterior, as rectas p , q e r são, respectivamente, perpendiculares aos lados QR , RP e PQ do triângulo normal pedido PQR .

Começemos por determinar a direcção de PQ .

Trata-se dum problema de perpendicularidade no plano xy . Seja U o ponto médio do segmento LM . A projecção U' de U fica no ponto médio de $L'M'$. Visto que o triângulo LOM é isósceles, a

recta OU é perpendicular à base LM . Estamos habilitados a aplicar o *método das alturas*.

Tomemos o triângulo do plano xy que tem para lados o eixo dos y , a recta r e LM . Um dos seus vértices é a origem O do sistema, um outro o ponto M . Designemos por S o terceiro vértice, isto é, o ponto de intersecção de r com LM . A projecção S' do vértice S está no ponto de intersecção de $z' \equiv r'$ com $L'M'$. A altura relativa ao vértice S é paralela ao eixo dos x ; a altura relativa ao

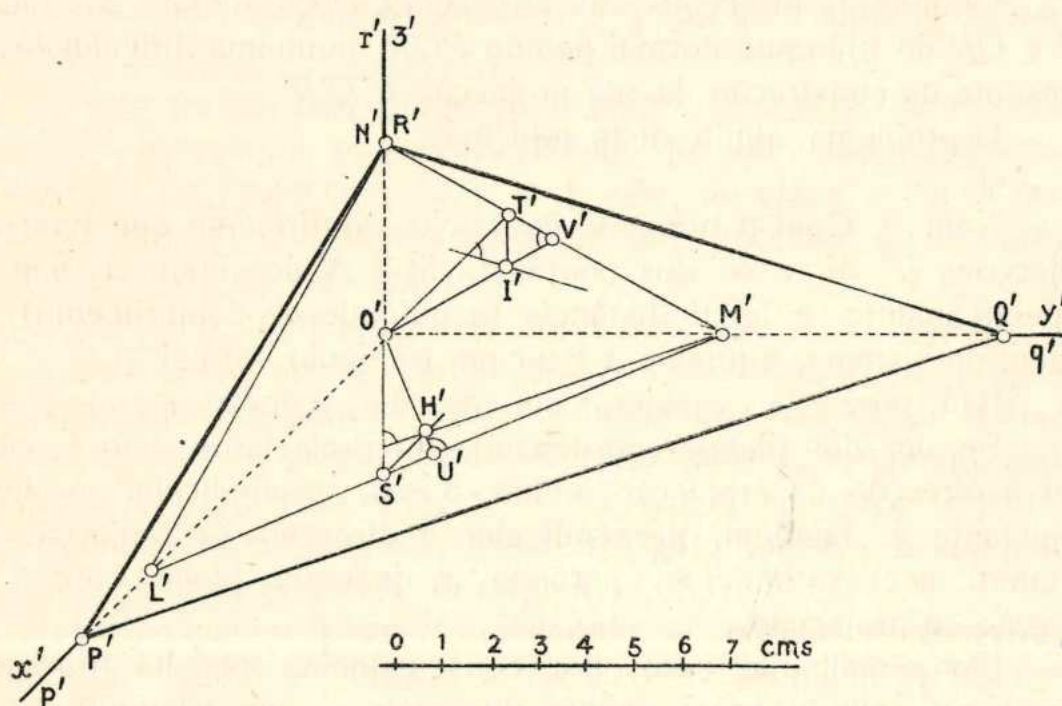


Fig. 71

vértice O é a própria recta OU ; a altura relativa ao vértice M dá a direcção procurada do lado PQ do triângulo normal pedido. Para determinar a projecção H' do ponto H de cruzamento das alturas, basta traçar $S'H' \parallel x'$ e determinar a intersecção de $S'H'$ com $O'U'$. A direcção da projecção $P'Q'$ de PQ é a da recta $M'H'$ que une M' com H' .

A determinação da direcção de QR efectua-se por igual processo; temos, apenas, que permutar o plano xy com o plano xz , ou seja, o eixo dos y com o eixo dos z .

Seja V o ponto médio do segmento MN . A projecção V' de V fica no ponto médio de $M'N'$. Visto que o triângulo MON é isósceles, a recta OV é perpendicular à base MN .

Tomemos o triângulo do plano yz que tem para lados o eixo dos y , a recta p e MN . Um dos seus vértices é a origem O do sis-

tema; um outro o ponto M . Designemos por T o terceiro vértice, isto é, o ponto de intersecção de p com MN . A projecção T' de T está no ponto de intersecção de $x' \equiv p'$ com $M'N'$. A altura relativa ao vértice T é paralela ao eixo dos z ; a altura relativa ao vértice O é a própria recta OV ; a altura relativa ao vértice M dá a direcção procurada do lado QR . Para determinar a projecção I' do ponto I de cruzamento das alturas, basta traçar $T'I' // z'$ e determinar a intersecção de $T'I'$ com $O'V'$. A direcção da projecção $Q'R'$ de QR é a da recta $M'I'$ que une M' com I' .

Obtidas as direcções das projecções $P'Q'$ e $Q'R'$ dos lados PQ e QR do triângulo normal pedido PQR , nenhuma dificuldade se apresenta na construção da sua projecção $P'Q'R'$.

O problema admite duas soluções.

Nota: — Com o presente exercício, confirma-se que fixar as projecções L' , M' e N' dos pontos L , M e N dos eixos x , y e z , respectivamente, a igual distância (a unidade de comprimento) da origem do sistema, equivale a fixar um triângulo normal.

[Há, porém, a considerar um caso de excepção.

Se um dos planos coordenados for projectante; isto é, contiver a direcção da projecção, então, o eixo perpendicular ao plano projectante é, também, perpendicular à direcção da projecção e, portanto, necessariamente, paralelo a qualquer plano normal à direcção da projecção.

Em semelhante caso, por consequência, não há triângulo normal em sentido propriamente dito, isto é, um triângulo PQR cujos vértices estejam nos eixos coordenados — um em cada eixo — e cujo plano seja normal à direcção da projecção. É, também, este o único caso, em que falha a equivalência.]

Pode notar-se, também, que, se, inicialmente, for fixado um triângulo normal PQR , se podem determinar pontos L , M e N — um em cada eixo — a igual distância da origem do sistema.

Por consequência:

Impor um triângulo normal equivale a impor os pontos L , M e N a igual distância da origem do sistema (à parte o caso de excepção que ficou apontado).

Exercícios

211. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180^\circ$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 45^\circ$.

Fixar, também, no eixo dos x o ponto L , sendo $O'L' = 7$ cms.; no eixo dos y , o ponto M , sendo $O'M' = 7$ cms.; no eixo dos z , o ponto N , sendo $O'N' = 4$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos a igual distância (a unidade de comprimento) da origem O do sistema,

Determinar:

a) As projecções r' e p' dos traços r e p nos planos xy e yz , respectivamente, do plano π , que passa pelo ponto L e é normal à direcção da projecção.

b) Um triângulo axonométrico XYZ que tenha o vértice X no ponto L .

Nota: — No caso presente, o plano xz é projectante, isto é, contém a direcção da projecção. Resulta que um plano perpendicular à direcção da projecção, como é o caso do plano π considerado, qualquer mesmo que seja a direcção da projecção, é, necessariamente, paralelo ao eixo dos y .

Por consequência: $r' // p' // y'$.

Pelo facto de os planos normais à direcção da projecção serem paralelos a um dos eixos coordenados, não existe triângulo normal em sentido propriamente dito. No exercício proposto, temos, portanto, um exemplo dum caso em que falha, propriamente, a equivalência entre a imposição dum triângulo normal e a dos pontos L , M e N a igual distância da origem.

Visto que o plano considerado π , normal à direcção da projecção, contém o ponto L , o traço r de π no plano xy contém L e obtém-se r' construindo, simplesmente, a paralela a y' tirada por L' .

Designemos por R o ponto de intersecção do eixo dos z com o plano π considerado.

O traço p de π no plano yz contém R e, assim, a determinação da projecção p' de p fica reduzida, essencialmente, à determinação da projecção R' de R .

Designando por S o ponto da recta LM , cuja projecção S' se sobrepõe a O' , temos que a recta OS é projectante e, portanto, $LR \perp OS$. Sabemos, também, que o triângulo LON é rectângulo em O e isósceles. Estamos, pois, habilitados a determinar a projecção R' de R pelo método das figuras semelhantes. Impõe-se, porém, que se tome para base de construção $L'M' \longleftrightarrow LM$.

Obtida a projecção R' de R , resta traçar r' paralela a y' tirada por R' .

Tendo, agora, em vista, a teoria desenvolvida no exercício resolvido II, a determinação do triângulo axonométrico XYZ considerado reduz-se à determinação das rectas de nível do plano

normal π , já construído, e, para determinar as rectas de nível, basta que construamos a projecção de qualquer triângulo de forma conhecida e que pertença ao plano normal π . Visto que conhecemos as projecções L' , M' e N' dos pontos L , M e N a igual distância da origem, podemos resolver problemas de transporte e, manifestamente, efectuando-se transportes, pode-se determinar a projecção de qualquer triângulo de forma dada e que pertença a qualquer plano antecipadamente fixado.

Será de aconselhar que se construa a projecção $E'L'F'$ do triângulo rectângulo isósceles ELF com o vértice do ângulo recto no ponto L e com os catetos LE e LF situados sobre a recta LR e o traço r do plano π , respectivamente, e iguais aos segmentos $OL = OM = ON$.

Depois de determinadas as rectas de nível do plano normal π , convirá determinar as rectas de nível do plano projectante xz , para o que basta determinar o ângulo θ que elas fazem com a recta LR — traço de π em xz — o que constitui problema fácil, pois, sem dificuldade de maior, podemos determinar o tamanho — verdadeiro tamanho — de XR e θ aparece como ângulo agudo dum triângulo rectângulo com um cateto igual a XR e a hipotenusa igual a $X'R'$.

O Problema tem duas soluções.

212. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180^\circ$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 45^\circ$.

Fixar, também, os pontos L , M e N , respectivamente dos eixos x , y e z , sendo $O'L' = O'M' = O'N' = 7$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos a igual distância (a unidade de comprimento) da origem O do sistema,

Determinar :

a) As projecções r' e p' dos traços r e p nos planos xy e yz , respectivamente, do plano π , que passa pelo ponto L e é normal à direcção da projecção.

b) O triângulo axonométrico XYZ cujo vértice X se sobrepõe ao ponto L .

Nota : — O Exercício presente é caso particular do exercício n.º 211.

No caso presente, a recta LN é perpendicular à direcção da projecção e pertence, por consequência, ao plano normal π considerado. Desta forma, obtêm-se as projecções r' e p' dos traços r e p de π nos planos xy e yz , traçando, simplesmente, as paralelas a y' conduzidas por L' e N' , respectivamente.

213. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180^\circ$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 90^\circ$ (isto é, y' perpendicular à recta em que se sobrepõem x' e z').

Fixar, também, no eixo dos x o ponto L , sendo $O'L' = 7$ cms.; no eixo dos y , o ponto M , sendo $O'M' = 7$ cms.; no eixo dos z , o ponto N , sendo $O'N' = 4$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos a igual distância (a unidade de comprimento) da origem do sistema,

Determinar:

a) As projecções r' e p' dos traços r e p nos planos xy e xz , respectivamente, do plano π que passa pelo ponto L e é normal à direcção da projecção.

b) O traço Z no eixo dos z da recta de nível que pertence ao plano xz e passa pelo ponto L .

Observação: — O problema admite duas soluções. Verificar que, numa das soluções, a recta de nível considerada é o eixo dos x e que, portanto, o ponto Z pedido coincide com a origem O do sistema. Pretende-se, porém, que seja apresentada a outra solução.

Nota: — O exercício presente é caso particular do exercício n.º 211.

No caso presente, temos a notar que o eixo dos y é paralelo ao plano de projecção.

De facto, temos que os planos normais à direcção da projecção são paralelos ao eixo dos y . Por consequência, designando por x_o , y_o e z_o as projecções ortogonais dos eixos x , y e z , respectivamente, sobre um plano normal à direcção da projecção, teremos que x_o e z_o são, necessariamente, perpendiculares a y_o .

Por outro lado, as rectas x' , y' e z' do plano de projecção projectam-se, também, ortogonalmente, sobre as rectas x_o , y_o e z_o , respectivamente. Isto implica que y' seja paralela a y_o ou, então, que, não só, seja x' paralela a x_o , como também, z' paralela a z_o .

Visto que y_o é paralela a y , a primeira conclusão implica que o eixo dos y seja paralelo ao plano de projecção; c. q. p.

Examinemos a segunda conclusão. O ser $x' // x_o$ e $z' // z_o$ implica que o plano de projecção seja paralelo aos planos normais ou, por outras palavras, que a projecção ortogonal é feita sobre um plano paralelo ao eixo dos y .

Num caso ou noutro, o eixo dos y é, necessariamente, paralelo ao plano de projecção, como se pretendia concluir.

No caso presente, não pode, porém, tratar-se de projecção ortogonal. Se se tratasse de projecção ortogonal, visto ser $O'L' = O'M'$ necessariamente, seria o plano de projecção paralelo ao plano xy e,

portanto, o eixo dos z projectante e isto implicava que N' coincidisse com O' , o que, realmente, se não verifica.

Pode verificar-se que, numa das soluções que o problema apresenta, o eixo dos x é recta de nível, fazendo o raciocínio seguinte:

Designemos por R o traço no eixo dos z do plano π considerado no enunciado, normal à direcção da projecção; por S , o ponto da recta LR , cuja projecção S' se sobrepõe à projecção O' da origem do sistema; por θ , o ângulo que as rectas de nível do plano xz fazem com a recta LP . O ângulo θ é, precisamente, o ângulo que a recta $L'S'$ do plano de projecção faz com a recta LS . Ora, visto que o eixo dos y é paralelo ao plano de projecção, tem-se $LO = M'O' = L'S'$.

Desta forma, o ângulo θ é, precisamente, igual ao ângulo que LO (ou seja o eixo dos x) faz com a recta LS e este resultado implica que, numa das soluções que o problema admite, a recta de nível considerada no enunciado é o eixo dos x .

214. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180^\circ$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 90^\circ$ (isto é, y' perpendicular à recta em que se sobrepõem x' e z').

Fixar, também, os pontos L , M e N dos eixos x , y e z , respectivamente, sendo $O'L' = O'M' = O'N' = 7$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos a igual distância (a unidade de comprimento) da origem,

Determinar:

a) as projecções r' e p' dos traços r e p nos planos xy e yz , respectivamente, do plano π que passa pelo ponto L e é normal à direcção da projecção.

b) O ângulo que uma das trissectrizes do ângulo (recto) de x com z faz com o plano de projecção.

215. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 135^\circ$ e $\xi = 90^\circ$ (isto é, y' perpendicular a z').

Fixar, também, os pontos L , M e N dos eixos x , y e z , respectivamente, sendo $O'L' = O'M' = O'N' = 7$ cms.

Impondo que L , M e N sejam pontos a igual distância (a unidade de comprimento) da origem do sistema,

Determinar:

a) O ângulo que a direcção da projecção forma com o plano de projecção.

b) O ângulo α de declive do eixo dos x , isto é o ângulo que o eixo dos x faz com o plano de projecção.

c) O contorno aparente da esfera que tem para centro a origem O do sistema e passa pelos pontos L , M e N .

Nota — Pode e deve-se antecipadamente concluir que numa das soluções que o problema apresenta, o plano de projecção é paralelo ao plano yz .

216. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 45^\circ$.

Fixar, também, os pontos L , M e N dos eixos x , y e z , respectivamente, sendo $O'L' = O'M' = O'N' = 7$ cms.

Impondo que os pontos L , M e N sejam pontos a igual distância da origem do sistema, determinar o contorno aparente da esfera que tem para centro a origem O do sistema e passa pelos pontos L , M e N .

217. Fixar uma projecção paralela $O'x'y'z'$ dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$, sendo $\eta = 180^\circ$ (isto é, x' sobreposta a z') e $\xi = 90^\circ$ (isto é, y' perpendicular a z').

Fixar, também, os pontos L , M e N , respectivamente, dos eixos x , y e z , sendo $O'L' = O'M' = O'N' = 7$ cms.

Impondo que os pontos L , M e N sejam pontos a igual distância da origem O do sistema, determinar o contorno aparente da esfera que tem para centro a origem O e passa pelos pontos L , M e N .

218. Desenhar um triângulo $L'M'N'$, sendo $L'M' = 10$ cms., $M'N' = 13$ cms., $L'N' = 11$ cms.

Determinar, em seguida, e designar por O' , o centro da circunferência circunscrita ao triângulo desenhado $L'M'N'$.

Traçar, depois, as rectas que unem o ponto O' com os pontos L' , M' e N' e designá-las por x' , y' e z' , respectivamente.

Impondo que a figura $O'x'y'z'$ seja uma projecção paralela dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$ e que L' , M' e N' sejam projecções de pontos L , M e N dos eixos x , y e z , respectivamente, e a igual distância da origem O do sistema.

Determinar:

a) O ângulo φ que a direcção da projecção forma com o plano de projecção.

b) Os ângulos de declive α , β e γ , isto é, respectivamente, os ângulos que os eixos x , y e z fazem com o plano de projecção.

c) O contorno aparente da esfera que tem para centro a origem O do sistema e passa pelos pontos L , M e N .

Nota: — No caso presente, tem-se $O'L' = O'M' = O'N'$ e o triângulo $L'M'N'$ é acutângulo. Poder-se-à e dever-se-à concluir, sem qualquer construção, que numa das soluções que o problema admite, o plano de projecção é paralelo ao plano LMN ou, por outras palavras, que o triângulo LMN é axonométrico.

[Sempre podemos tirar semelhante conclusão, desde que a projecção seja isométrica, isto é $O'L' = O'M' = O'N'$ e o triângulo $L'M'N'$ acutângulo].

219. Desenhar um triângulo $O'U'V'$, sendo em milímetros $U'V' = 70$, $U'O' = 35$ e $V'O' = 45$. Designar por x' e y' os lados $O'U'$ e $O'V'$, respectivamente.

Traçar a altura correspondente ao vértice O' e designá-la por z' .

Considerar a figura $O'x'y'z'$ como projecção paralela dum sistema de eixos ortogonais $Oxyz$.

Fixar uma recta $r \equiv (r', r'_p)$ que passe pela origem do sistema, sendo r'_p perpendicular a x' e formando r' com r'_p um ângulo de 60° .

Fixar, depois, na recta r o ponto $W \equiv (W', W'_p)$, sendo $O'W' = 1$ cm.

Designar, finalmente, por U o ponto do eixo dos x que se projecta em U' e por V , o ponto do eixo dos y que se projecta em V' .

Impondo que seja $OU = OV = OW$, determinar as projecções N' e $\bar{N}'$ dos pontos N e $\bar{N}$ do eixo dos z que ficam à mesma distância da origem que os pontos U , V e W .

220. Desenhar um triângulo $L'V'N'$, sendo $L'V' = 9$ cms., $V'N' = 8$ cms., e $L'N' = 6$ cms. Traçar a altura que parte de N' e a bissectriz do ângulo em V' , designar por O' o ponto de intersecção da bissectriz com a altura.

Considerar L' , V' , N' e O' como projecções (projecção paralela) de quatro pontos L , V , N e O , tais que $OL = OV = ON$, ON perpendicular a OL e OV e ângulo OL com OV igual a 60° .

Determinar:

a) A projecção M' dum ponto M , tal que $OM = OL = ON$ e OM perpendicular tanto a OL como a ON .

b) A projecção da secção feita no tetraedro $OLVN$ pelo plano bissector do diedro em OL .

NOTAS E ADITAMENTOS

I — Homologia afim e afinidade

Na primeira parte do primeiro capítulo — compreendida também a teoria da elipse — empregaram-se, correntemente, com o mesmo sentido, as designações de *afinidade* e de *homologia afim*. Há que fazer, porém, uma observação sobre o significado preciso de tais expressões.

As designações de *afinidade* e de *transformação afim* são correntemente usadas na literatura matemática com a mesma acepção, para indicar uma *transformação pontual* que satisfaça, simplesmente, aos seguintes requisitos :

- a). Seja unívoca, directa e inversamente ;
- b) Transforme rectas em rectas ;
- c) Finalmente, para a qual o *ser elemento do infinito* seja propriedade que se mantém.

Nas designações de *afinidade* e de *transformação afim*, no sentido correntemente adoptado na literatura matemática e que, realmente, deve ser mantido, de nenhum modo é imposta a existência duma recta (eixo de homologia) com a propriedade de serem *duplos* todos os seus pontos e dum ponto (centro de homologia) com a propriedade de serem, igualmente, *duplas* todas as rectas que por ele passam.

A expressão *afinidade* tem, portanto, sentido mais lato que a expressão *homologia afim*.

Homologia afim — plana — é, assim, caso particular de *afinidade* — é uma *afinidade* especial, na qual se encontra uma *recta* (o eixo da homologia) com a propriedade de todos os seus pontos não serem modificados pela transformação e um *ponto* (o centro da homologia) com a propriedade de não serem, igualmente, modificadas as rectas que por ele passam.

Em Geometria Descritiva, porém, as transformações que mais interessam são *homologias planas* e, quando se considera projecção paralela — o caso mais corrente — *homologia afim*.

Desta forma, *afinidade* equivale, em Geometria Descritiva, por assim dizer, a *homologia afim* e não se impõe a necessidade de substituir a expressão mais simples, mas mais lata, de *afinidade* pela expressão mais complexa, mas mais precisa, de *homologia afim*.

Apresentam-se, mesmo, casos, de resto já consagrados pelo uso, em que se não mostra possível a designação precisa de *homologia afim*. Em Geometria de Monge, por exemplo, a expressão *eixo de afinidade dum plano* é usada para indicar uma recta e um conceito, cujo significado e valor não têm que ser encarecidos, e não se vê possibilidade de substituir semelhante expressão por outra mais expressiva e precisa.

No entretanto, à parte a primeira parte do primeiro capítulo (elipse incluída), nunca deixamos de empregar a expressão completa, *homologia afim*, não a substituindo pela expressão simples, *afinidade*.

II — Homologia afim — Homologia não afim — Homotetia.

Falando com rigor, homotetia é uma transformação afim.

É *transformação afim*, porque satisfaz aos requisitos impostos a semelhantes transformações, inclusivé a propriedade característica de manter *o ser elemento do infinito*. Não é justo, portanto, que se considere *homotetia*, que é forma particular de homologia, como *homologia não afim*.

Há, porém, outro ponto de vista a ser considerado.

Homotetia é forma muito especial de *homologia afim*. Tem de comum com a *homologia não afim*, pròpriamente dita, o ter para *centro* um ponto ordinário. E é claro que este carácter, de ter por centro um ponto ordinário, do ponto de vista elementar da Geometria, é dominante.

Vista, portanto, a questão *elementarmente*, *homotetia*, naturalmente, apresenta-se mais próxima do tipo de *homologia não afim* do que do tipo *homologia afim*, no qual, as rectas que unem os pontos às suas imagens têm a propriedade particular de serem paralelas.

Adoptamos no texto, precisamente, como elemento determinativo para a classificação em *afins* e *não afins* das homologias, o ser o seu *centro ponto do infinito* ou *ponto ordinário*.

Deste ponto de vista, considerou-se a *homotetia* como caso de transformação *não afim*; mas, certamente, em muitas das consi-

derações desenvolvidas sobre *homologia não afim*, implicitamente (isto é sem menção especial), é excluído o caso de poder ser incluída a homotetia. Assim os conceitos de *recta limite*, de *recta de fuga* e de *recta principal* nenhuma relação têm com *homotetia*.

III — Homologia involutiva.

Considerou-se no texto como elemento determinativo do carácter *involutivo* ou *não involutivo* duma *homologia não afim* o facto de a *recta limite* e a *recta de fuga* se sobreporem ou não se sobreporem.

Disse-se *involutiva* uma *homologia não afim*, quando a *recta limite* e a *recta de fuga* se encontram sobrepostas.

De se encontrarem sobrepostas a *recta limite* e a *recta de fuga*, resulta a propriedade de *a imagem duma imagem reproduzir o elemento original*.

É de notar, porém, que, certamente, as noções de *recta limite* e de *fuga* são particulares e exclusivas da *teoria da homologia não afim* (excluída, também, a homotetia). Se quisermos generalizar, em *homologia afim* (homotetia incluída), *recta limite*, *recta de fuga* e *recta do infinito* sobrepõem-se; mas este facto nada mais exprime do que *o ser a recta do infinito* recta dupla que é o carácter essencial da *homologia afim*. Seria errado concluir que em *homologia afim*, como *homologia* em que *recta limite* e de *fuga* se sobrepõem, *a imagem duma imagem venha cair sobre o elemento original*. Seria, igualmente, fora de propósito, considerar qualquer *homologia afim* como *homologia involutiva*.

O carácter essencial da *involução* é o de *ser operação que composta consigo mesmo reproduz a identidade*, isto é, *aplicada à imagem obtida reproduz o original*. Uma *homologia não afim* com as *rectas limite* e de *fuga* sobrepostas disse-se *involutiva*, precisamente, por apresentar semelhante carácter.

Entre as *homologias afins* são *involutivas* as *simetrias*, ortogonais ou oblíquas.

Uma *homotetia* é *involutiva* somente quando seja *discordante* e de *razão* igual a -1 , isto é, quando seja uma *simetria pontual*.

IV — Exercício n.º 89.

Vamos aqui apresentar a resolução do *exercício* n.º 89.

Para se obter um desenho mais expressivo, convém, porém, modificar os dados do exercício.

Tomaremos o seguinte enunciado :

89. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 10 cms de lado (fig. 72). Designar por D o ponto do lado AB , tal que

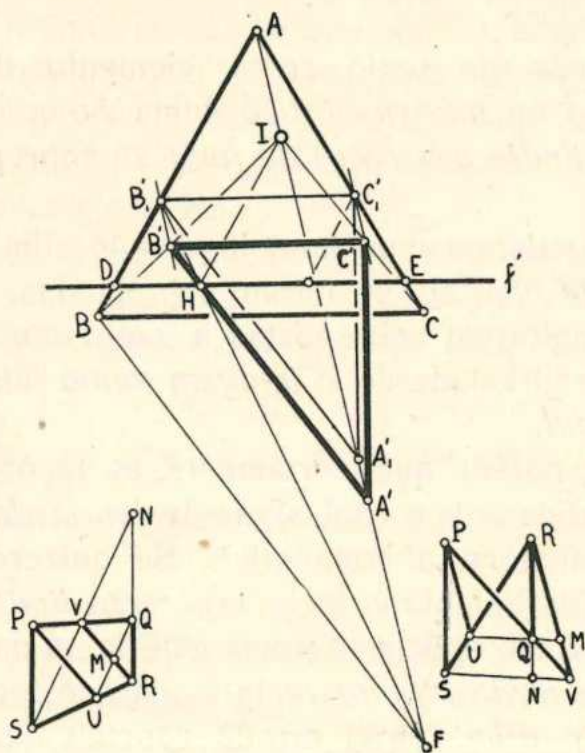


Fig. 72

$AD = 9$ cms; por E , o ponto do lado AC , tal que $AE = 9$ cms. Traçar e designar por f' a recta DE .

Transformar por homologia, que tenha para recta de fuga a recta f' , o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, cujos lados $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, meçam 6 cms, 8 cms e 10 cms.

Res.: Começamos por desenhar um triângulo $A_1B_1C_1$, igual ao triângulo $A'B'C'$, com os vértices B_1 e C_1 , respectivamente, sobre os lados AB e AC do triângulo ABC , e de forma que B_1C_1 fique paralelo a BC .

Construa-se a recta AA_1 . O centro I da homologia, que se pretende determinar, fica sobre a recta AA_1 .

Se mantivermos fixo o triângulo ABC e deslocarmos por translação, paralela a recta AA_1 , o triângulo $A_1B_1C_1$, os dois triângulos mantêm-se homológicos, com o eixo de homologia paralelo a BC .

Resta determinar a translação a efectuar. Seja esta $B'_1 B'$ ($B'_1 B'$ paralela a AA'_1).

Na intersecção de BB' com AA'_1 fica o centro I de homologia.

Como condição necessária e suficiente a satisfazer, deve a paralela a AB , tirada por I , intersectar $A'B'$ sobre a recta f' .

O problema pode resolver-se lançando mão da proposição seguinte:

Seja PQRS um trapézio, no qual PQ e RS são os lados não paralelos.

Unindo os vértices P e Q a qualquer ponto U do lado RS e tirando pelos vértices opostos R e S, respectivamente, paralelas às rectas obtidas, o ponto de intersecção das paralelas fica no lado PQ.

[A proposição é verdadeira quer se trate dum trapézio simples quer dum trapézio estrelado].

Dem.: Designemos por V o ponto de intersecção da paralela a PU , tirada por R , com o lado PQ ; por M , o ponto de intersecção de UQ com RV ; por N , o ponto de intersecção de SV com QR .

Basta mostrar que a recta SV é paralela a UQ .

Para tanto, basta mostrar que se tem: $\frac{SV}{NV} = \frac{UM}{QM}$.

Ora: $\frac{SV}{NV} = \frac{PV}{QV}$; $\frac{UM}{QM} = \frac{PV}{QV}$.

Portanto: $\frac{SV}{NV} = \frac{UM}{QM}$; c. q. p.

Na figura traçou-se BF paralela a $B'_1 A'_1$ e determinou-se a intersecção F desta paralela com a recta AA'_1 . Em seguida, uniu-se F com B'_1 e determinou-se a intersecção H da recta obtida, $B'_1 F$, com a recta f' fixada para recta de fuga.

Para determinar o centro I de homologia, resta tirar por H a paralela HI a AB e determinar a intersecção I de HI com AA'_1 .

De facto: Consideremos o trapézio $B'_1 FIB'$, de lados não paralelos $B'_1 F$ e IB' e de bases $B'_1 B'$ e IF . As duas rectas $B'_1 B'$ e FB unem os vértices B'_1 e F a um ponto B do lado IB' . A recta $B'A'$ é paralela a FB . A recta IH , por construção, é paralela a $B'_1 B$. Pela proposição considerada, as duas rectas $B'A'$ e IH intersectam-se sobre $B'_1 F$. Por consequência, $B'A'$ passa por H , e, assim, a paralela a AB tirada por I intersecta $A'B'$ sobre a recta f' , como era preciso e suficiente que se verificasse.

V — Exercício n.º 91.

Vamos apresentar a resolução do *exercício* n.º 91.

91. Desenhar um ângulo φ de 45° (fig. 73). Designar por a e b os lados e por S o vértice. Traçar e designar por c a bissetriz. Sobre o lado a marcar o ponto A , sendo SA igual a 3 cms; sobre b , o ponto B , sendo SB igual a 6 cms; sobre c , o ponto C , sendo SC igual a 7 cms. Construir o triângulo ABC .

Determinar o centro I , o eixo t , a recta limite l e a recta de fuga f' da homologia que realiza as seguintes condições:

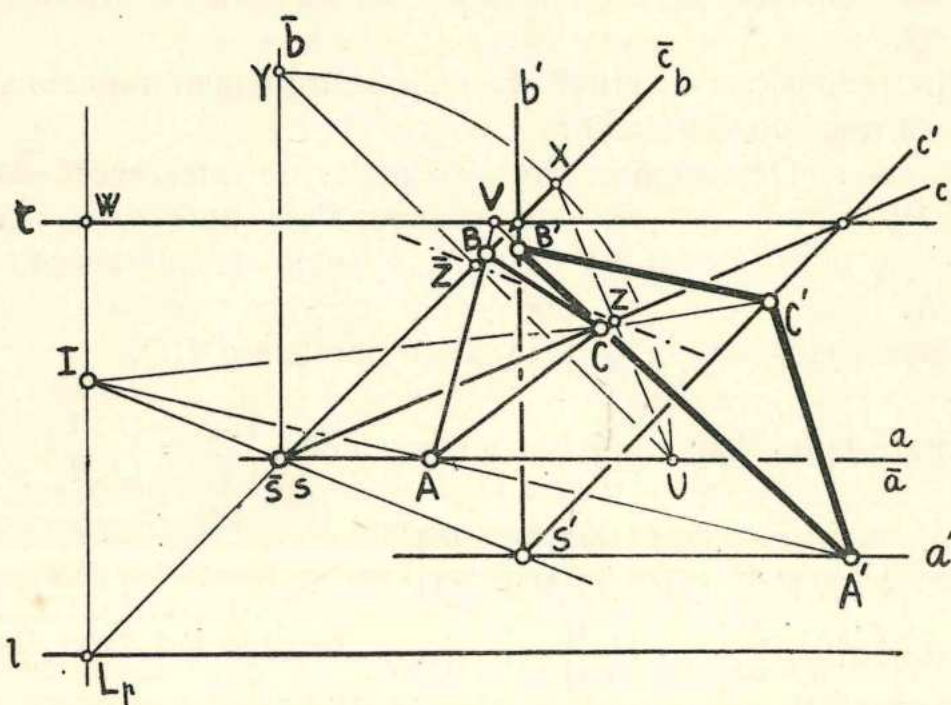


Fig. 73

- Transforme o ângulo φ , de 45° , em ângulo recto, sendo a imagem a' de a paralela a a ;
- Seja de 2 cms a distância de a' a a ;
- Transforme a bissetriz c de φ na bissetriz c' da imagem φ' de φ ;
- Transforme o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$ com o lado $A'B'$ perpendicular a c' .

Construir, também, a imagem do ângulo φ e do triângulo ABC .

Res.: A existência duma homologia que transforme um feixe $S(abc)$ num feixe $S'(a'b'c')$ implica a existência de infinitas homologias, todas com o mesmo eixo, que transformam, igualmente, o 1.º feixe no 2.º. De facto, qualquer ponto I tomado na recta SS' ,

que une os centros dos feixes, distinto dos centros S e S' , pode ser tomado para centro duma tal homologia :

Se nenhum dos dois feixes $S(abc)$ e $S'(a'b'c')$ for de raios paralelos, podemos tomar para centro de homologia o ponto do infinito da recta SS' e temos uma homologia afim que transforma o 1.º feixe no 2.º.

Por outro lado, uma homologia afim não é destruída por uma translação que tenha para centro (direcção) o centro da homologia.

Baseados nos princípios que ficam expostos podemos resolver a questão proposta do seguinte modo.

a) Começemos por construir um feixe $\bar{S}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ congruente do feixe $S'(a'b'c')$ de forma que $\bar{S}$ se sobreponha a S e $\bar{a}$ a a . Por consequência, $\bar{b}$ perpendicular a a e $\bar{c}$ sobreposta a uma das bissectrizes dos ângulos formados por $\bar{a}$ e $\bar{b}$.

Uma das bissectrizes é b e na figura tomou-se a solução $\bar{c}$ sobreposta a b .

b) Determina-se a homologia afim que transforma $S(abc)$ em $\bar{S}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

No caso presente, esta homologia pode determinar-se pela seguinte construção :

Tomemos qualquer ponto U em a e tiremos as rectas UX e UY perpendiculares a c e $\bar{c}$, designando por X e Y os pontos de intersecção com b e $\bar{b}$, respectivamente. Determinemos as intersecções, Z de UX com c e $\bar{Z}$ de UY com $\bar{c}$. Pelo facto de c e $\bar{c}$ serem bissectrizes dos ângulos de a com b e $\bar{a}$ com $\bar{b}$, Z e $\bar{Z}$ são os pontos médios dos segmentos UX e UY e, desta forma, a homologia afim, de eixo $a \equiv \bar{a}$, e que transforma Z em $\bar{Z}$, transforma o feixe $S(abc)$ no feixe $\bar{S}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

c) Transportemos por translação paralela a $Z\bar{Z}$ o feixe $\bar{S}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ a uma posição $S'(a'b'c')$ tal que a' diste 2 cms de a . Os feixes $S(abc)$ e $S'(a'b'c')$ mantêm-se homológicos e, como centro de homologia, pode tomar-se qualquer ponto da recta SS' (distinto de S e S'), paralela a $Z\bar{Z}$.

d) Resta, agora, para determinar o centro I da homologia procurada, lançar mão da condição de a imagem $A'B'$ de AB ter de ser perpendicular a c' e, portanto, também, a $\bar{c}$.

Para tanto, começemos por determinar o eixo t da homologia. Este é paralelo à recta a e passa pelos pontos bb' e cc' .

Para ter $A'B'$, basta determinar o ponto V de intersecção de AB com t e tirar por este ponto V a perpendicular a c' .

e) Determinada a imagem $A'B'$ de AB , obtém-se o centro I da homologia pedida procurando o ponto de intersecção das rectas AA' e SS' .

f) A determinação da recta limite l , da recta de fuga f' e da imagem C' de C não oferece, agora, qualquer dificuldade.

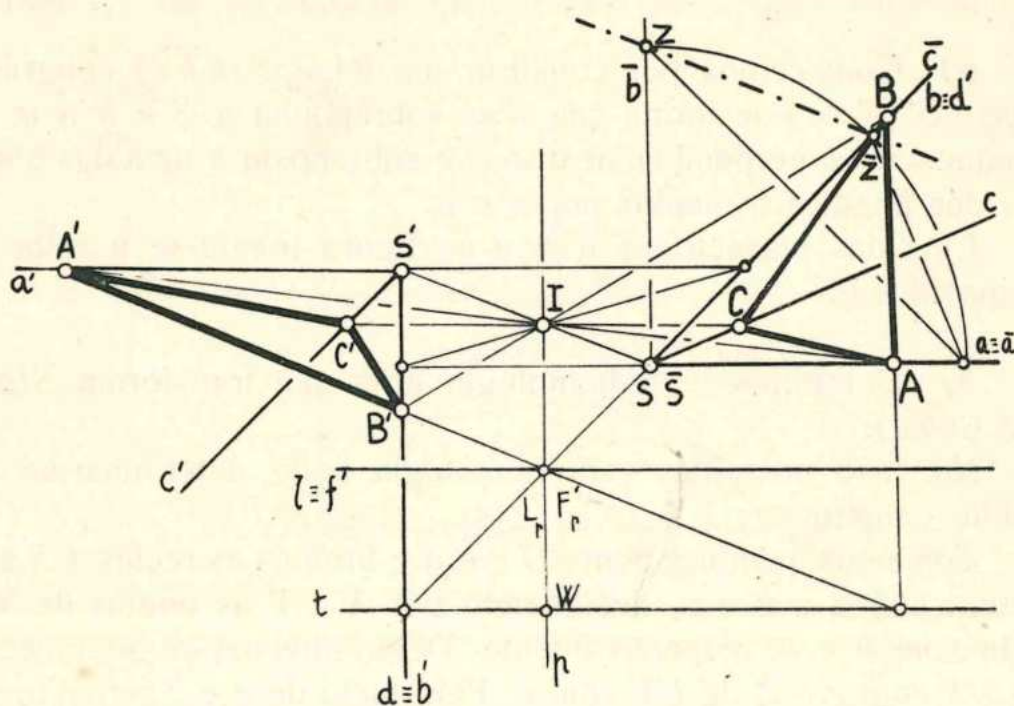


Fig. 74

Nota: A recta de fuga f' não se apresenta na figura por se encontrar fora dos limites do desenho.

VI — Exercício n.º 92.

Há grande analogia entre os exercícios n.ºs 91 e 92.

Por tal motivo, vamos considerar, também, a resolução do exercício n.º 92.

92. Desenhar um ângulo φ de 45° (fig. 74). Designar por a e b os seus lados; por S , o seu vértice. Traçar e designar por c a bissectriz. Sobre o lado a marcar o ponto A , sendo SA igual a 5 cms; sobre b , o ponto B , sendo SB igual a 7 cms; sobre c , o ponto C , sendo SC igual a 2 cms. Construir o triângulo ABC .

Determinar o centro I , o eixo t , a recta de fuga e limite, $f' \equiv l$, da homologia involutiva que realiza as seguintes condições:

- a) Transforma o ângulo φ , de 45° , num ângulo φ' de 90° ;
 - b) A imagem a' de a é paralela à original a e dista desta 2 cms.;
 - c) A bissectriz c de φ deve transformar-se na bissectriz c' de φ' .
- Determinar, também, a imagem do triângulo ABC .

Res.: A teoria desenvolvida na resolução do exercício n.º 91, aplica-se, integralmente, ao presente exercício. Apenas uma diferença. Na parte final do exercício n.º 91, o centro I da homologia é determinado por uma condição de perpendicularidade, ao passo que, no presente exercício, se determina pela condição de a homologia ser involutiva.

CORRECÇÕES

Pág. 25 — Exercício 53.

O exercício 53, tal como se encontra enunciado, constitui simples repetição do exercício 51. Indica-se a correcção que há a fazer :

Enunciado publicado

53. Desenhar um rectângulo $ABCD$ cujos lados meçam 5 e 3 cms.

Determinar, depois, um dos eixos da elipse que tem para centro o vértice A do rectângulo desenhado e passa pelos outros três vértices.

Enunciado corrigido

53. Desenhar um rectângulo $ABCD$ cujos lados lançam 5 e 3 cms.

Determinar, depois, um dos eixos da elipse que tem para centro o vértice A , passa pelos vértices B e C e é tangente a CD .

Pág. 83 — Exercício 90.

O enunciado do exercício n.º 90, tal como se encontra publicado, é simples repetição do exercício anterior, n.º 89. O enunciado que devia ser apresentado era, realmente, um pouco diferente.

Apresenta-se, agora, ao lado do enunciado apresentado, o que o deve substituir :

Enunciado publicado

90. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 7 cms. de lado. Designar por D e E os pontos médios dos lados AB e BC ; por f' , a recta que une os pontos D e E .

Transformar por homologia, que tenha para recta de fuga a recta f' , o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, cujos lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, meçam 10 cms, 8 cms e 4 cms, respectivamente.

Enunciado corrigido

90. Desenhar um triângulo equilátero, ABC , de 7 cms de lado. Designar por D e E os pontos médios dos lados AB e CB , por f' , a recta que une os pontos D e E .

Transformar por homologia, que tenha para recta de fuga a recta f' , o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, cujos lados, $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$ meçam 8 cms, 10 cms e 4 cms, respectivamente.

Por consequência: Em qualquer homologia, duas circunferências são transformadas em cónicas homotéticas. Particularmente, em homologia afim, duas quaisquer circunferências são transformadas em duas elipses homotéticas.

.....

Por consequência: Em qualquer homologia afim, circunferências são transformadas em cónicas homotéticas. Assim, em homologia afim, duas quaisquer circunferências são transformadas em duas elipses homotéticas.

.....

ERRATAS

<i>Pág.</i>	<i>Linha</i>	<i>Onde se lê</i>	<i>Deve ler-se</i>
3	20	é determinado e pode	é determinado (supondo, é claro, fixado o eixo da homologia) e pode
8	31	dos ângulos em A e B	dos ângulos em A e D
12	20	um trapézio rectângulo ABD	um trapézio rectângulo $ABCD$
14	1	Desenhar um quadrado $ABCD$.	Desenhar um quadrado $ABCD$, de 4 cms de lado.
15	18	é de conhecimento trivía	é de conhecimento trivial
16	38	que une o ponto O ao ponto	que une o ponto B ao ponto
25	27	desenhado a tangente	desenhado e tangente
31	8	<i>Recta da fuga</i>	<i>Recta de fuga</i>
31	15	recta da fuga	recta de fuga
32	33	recta limite,	recta de fuga
32	39	e $F'\hat{J}\bar{F}'$ que	e $F'\hat{J}\bar{F}'$ que
33	11	<i>compontuais</i>	<i>não compontuais</i>
33	—		Na fig. 8 não deviam figurar as letras F' e $\bar{F}'$, porque os pontos que elas representam não estão, de facto, determinados na figura.
42	3	<i>coincide a figura</i>	<i>coincide com a figura</i>
42	19	$(B) \rightarrow (B')$	$(B) \rightarrow B'$
46	12	<i>que a circunferência intersecte</i>	<i>que a circunferência tenha o centro na recta principal e intersecte</i>
47	27	se a circunferência Γ intersecta	se a circunferência Γ tem o centro na recta principal e intersecta
53	11	o ponto limite do eixo	o ponto limite das rectas perpendiculares ao eixo
55	23	que o ângulo $E\hat{I}E$	que o ângulo $E\hat{I}\bar{E}$
55	30	e a tangente	e a tangente $B\bar{X}$
57	8	Sejam A e A	Sejam A e $\bar{A}$
58	38	$OA\bar{A}$	$O\bar{A}\bar{A}$

Pág.	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
58	39	$\overline{LX} \cdot \overline{LX} = \overline{LU}^2 = \overline{LV}^2$	$\overline{LX} \cdot \overline{L\bar{X}} = \overline{LU}^2 = \overline{LV}^2$
59	2	para recta limite, l ,	para eixo, l ,
59	5	O ponto O	O ponto $\bar{O}$
60	3	Temos $\overline{LP} \cdot \overline{LP} = \overline{LU}^2$. Por- tanto, $\overline{LP} \cdot \overline{LP} = \overline{LX} \cdot \overline{LX}$	Temos $\overline{LP} \cdot \overline{L\bar{P}} = \overline{LU}^2$. Por- tanto, $\overline{LP} \cdot \overline{L\bar{P}} = \overline{LX} \cdot \overline{L\bar{X}}$
60	4	$\frac{\overline{LX}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{LX}}$	$\frac{\overline{LX}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{L\bar{P}}}{\overline{L\bar{X}}}$
60	10	O ângulo $P\hat{Q}X$	O ângulo $P\hat{Q}\bar{X}$
67	7 e 8	Com as quatro tangentes podemos formar dois quadri- láteros (um simples, o outro, estrelado). Formemos aquele	Com as quatro tangentes podemos formar três quadri- láteros (dois simples, o ter- ceiro estrelado). Formemos um que
73	12	do exercício I	de exercício II
79	6 e 7	tangente à homologia no ponto A	tangente à homóloga no ponto A
79	15	um triângulo de 3 cms de lado	um triângulo equilátero ABC de 3 cms de lado
80	24	tirando por X e Y às	tirando por X e Y paralelas às
90	37	um triângulo $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$	um triângulo $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$
91	3	A construção da figura F	A construção da figura $\bar{F}$
92	9	numa figura F	numa figura $\bar{F}$
92	20	figura F semelhante	figura $\bar{F}$ semelhante
123	36	se projecta na recta $A'B'$	se projecta na recta $A'D'$
137	9	$l^2 + m^2 + n^2 = u^2 (\cos^2 \alpha +$ $+ \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)$	$l^2 + m^2 + n^2 = u^2 (\cos^2 \alpha +$ $+ \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$
139	13	y em y'	Y em y'
142	—		Na fig. 55 que se apresenta na pág. 142 a letra B encon- tra-se mal colocada; deve deslocar-se para o lugar no texto indicado.
149	3	circunferência do diâmetro	circunferência de diâmetro
151	13	no qual	na qual
179	16	da esfera E	da esfera E

ÍNDICE

Prefácio	v
--------------------	---

CAP. I — HOMOLOGIA

Introdução	1
Homologia afim	2
Projecção paralela	3
Exercícios resolvidos	4
Exercícios	7
Elipse	15
Exercícios resolvidos	16
Exercícios	21
Homologia não afim	31
Problemas fundamentais	33
Projecção central	42
Exercícios resolvidos	44
Cônicas	45
Circunferência	45
Parábola	51
Elipse	53
Hipérbole	56
Problema fundamental	62
Exercícios resolvidos	68
Exercícios	80

CAP. II — PROJEÇÃO ORTOGONAL

Introdução	87
Projecção e homologia afim, ortogonais. Perpendicularidade	87
Redução de dimensões	89
Forma, homologia afim e projecção	89
Exercícios resolvidos	97
Exercícios	122

CAP. III — AXONOMETRIA

Axonometria ortogonal	133
Projecção ortogonal dum sistema de eixos ortogonais.	134
Rectas de nível	134
Triângulo axonométrico	135
Ângulos de declive	135
Inclinação e rotação	136
Circunferência de redução	136
Comprimentos reduzidos dos eixos	136
Triângulo de redução	137
Axonometria construtiva	138
Representação do ponto	138
Representação da recta	138
Representação do plano	139
Exercícios resolvidos	139
Exercícios	167
Axonometria paralela	184
Exercícios resolvidos	187
Exercícios	198

NOTAS E ADITAMENTOS

I — Homologia afim e afinidade	205
II — Homologia afim — Homologia não afim — Homotetia	206
III — Homologia involutiva	207
IV — Exercício n.º 89	207
V — Exercício n.º 91	210
VI — Exercício n.º 92	212
Correcções	215
Erratas	218

ACABADO DE IMPRIMIR
NA EMP. INDUSTRIAL GRÁFICA DO PORTO, LIMITADA
174 — RUA DOS MÁRTIRES DA LIBERDADE — 178
NO ANO DE 1953

biblioteca
municipal
barcelon



51785

Exercícios de geometria
descritiva