MEMORIA

SOBRE A

DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DO PENDULO

POR

F. A. de Brito Limpo

LISBOA
TYPOGRAPHIA DO FUTURO
Rua da Cruz de Pau, 35
1865

MEMORIA

SOBRE A

DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DO PENDULO

POR

F. A. de Brito Limpo

Tenente d'engenharia, membro do instituto geographico, instructor interino na escola do exercito.

LISBOA
TYPOGRAPHIA DO FUTURO
Rua da Cruz de Pau, 35
1865

Com a publicação da presente memoria tivemos em vista mostrar, que o achatamento do espheroide terrestre dado pelas observações pendulares, em vez de afastar-se muito do que resulta das medidas geodesicas, como em tempo se julgou, parece pelo contrario ter com elle completa semelhança, desapparecendo as influencias de certas perturbações que algumas vezes se notavam.

Não mirámos só a este fim; quizemos que o comprimento do pendulo de segundos, dado pela observação e deduzido depois por meio de uma formula em perfeita harmonia com a figura geral da terra, nos annunciasse melhor pelas suas anomalias as grandes variações na fórma e natureza do solo. O pendulo de segundos é tambem um importante instrumento de geologia.

Como de pendulo tratavamos, tivemos a lembrança de calcular uma taboa que nos desse o valor da *gravidade* desde a latitude 30º até 60º, e desde 0^m até 1600 metros de altitude. A relação que existe entre os dois elementos (comprimento do pendulo e gravidade), e a confiança que temos nos coefficientes que deduzimos, nos levaram a emprehender mais este trabalho que talvez não seja de todo infructifero.

Finalmente, já que tratamos de explicações, vamos pôr tambem aqui as principaes razões que nos levaram á recente publicação de um nosso humilde escripto que intitulamos «*Taboas para o calculo das refracções terrestres, etc.*»

São muito conhecidos os graves inconvenientes que resultam de se adoptar um constante coefficiente de refracção nos grandes nivelamentos geodesicos; estes inconvenientes augmentam sobremaneira todas as vezes que os pontos de que se requer a differença de nivel estão a grandes distancias e teem altitudes mui diversas. O emprego das *observações reciprocas* e de outros meios já usados não remedeia o mal: póde por tanto acontecer que nos terrenos muito accidentados, como são geralmente os do nosso paiz, appareçam nas operações erros intoleraveis em relação ao progresso da sciencia.

Em vista disto procuramos entre os trabalhos dos mais illustres especialistas uma formula, baseada em grande numero de observações e em hypotheses racionaes, pela qual podessemos eliminar, ou pelo menos atenuar, semelhantes erros; expuzemos esta formula devida ao grande genio de M.r W. Struve, e calculamos umas taboas para facilidade da sua aplicação acompanhadas de algumas indicações nossas sobre os grandes nivelamentos.

Quando estavamos no fim do trabalho, recebemos uma excellente obra do distincto engenheiro hespanhol o sr. D. Carlos Ibañez intitulada «*Estudios sobre nivelacion geodesica*»; e encontrando nella uma serie de observações entre Madrid e Ocaña feitas de proposito em circumstancias as mais desfavoraveis, partimos destes dados experimentaes, e, fazendo uso do methodo que tinhamos exposto, achamos resultados extremamente satisfactorios.

Julgamos portanto que era de vantagem a publicação da nossa obrasinha, porque ao menos chamaria a attenção das pessoas mais competentes deste paiz para um ponto de geodesia importante e difficil.

Exceptuando as expressões generosas de alguns amigos, não sabemos ainda se conseguimos o nosso fim. O desprezo completo servir-nos-hia de desengano. Felizmente nenhum remorso sentimos dando á luz tão insignificantes producções; pois tudo é publicado á nossa custa, tudo é feito nas horas que nos são concedidas para descançar dos deveres officiaes.

Assim nos vamos entretendo, talvez com nenhum proveito da sciencia, mas com o firme desejo de lhe ser util e de concorrer, mesmo com os pequenos recursos de obreiro obscuro, para esse variado trabalho do qual o sublime conjuncto se denomina —Progresso.

Lisboa 28 de julho de 1865.

MEMORIA

SOBRE A

DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DO PENDULO

Demonstra-se pela theoria da attracção que o achatamento do espheroide terrestre está ligado ao comprimento do pendulo de segundos; e que, designando por c este comprimento e por L a latitude do logar, o valor de c, depois de feita a reducção ao vacuo e ao nivel das aguas medias do oceano, é expresso por uma funcção da seguinte fórma:

$$c = A + B \operatorname{sen}^2 L.$$

A e B são duas constantes, representando a primeira o comprimento do pendulo no equador, onde $L = o$, e a segunda o seu excesso no polo, onde $L = 90°$.

Estas constantes podem determinar-se por duas observações de pendulo feitas em duas latitudes conhecidas. Com effeito, sejam c', c'' os comprimentos observados nas latitudes L', L'', teremos

$$\left.\begin{aligned} c' &= A + B \operatorname{sen}^2 L' \\ c'' &= A + B \operatorname{sen}^2 L'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde se deduz

$$B = \frac{c'' - c'}{\operatorname{sen}(L' + L'') \operatorname{sen}(L'' - L')} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Conhecido B, e entrando com o seu valor em qualquer das equações (1), acharemos facilmente o valor de A.

Não havendo infelizmente em o nosso paiz observações de pendulo que mereçam confiança, pois só nos consta que em Coimbra, no tempo do sr. Monteiro da Rocha, se fizeram alguns ensaios deste delicadissimo trabalho que a par da perfeição dos apparelhos exige a mais severa critica e aturada paciencia, vamos recorrer primeiramente ás observações que MM. Arago, Biot, Mathieu, Bouvard e Chaix, executaram em diversos pontos da meridiana desde Formentera até Dunkerque. Estes trabalhos, praticados por tão grandes illustrações scientificas, devem merecer grande credito, e nos farão conhecer para cada um dos pontos em que tiveram logar as experiencias o comprimento do pendulo sexagesimal que, collocado no vacuo, e ao nivel das aguas medias do oceano, faria 86.400 oscillações em um dia solar medio. Como além disto cada um dos mencionados pontos é determinado rigorosamente pelas operações geodesicas da França, as suas latitudes merecem muita confiança.

A seguinte tabella mostra estes elementos:

Nome dos logares	Latitudes	Comprimento do pendulo depois de reduzido ao vacuo e ao nivel do oceano	Nome dos observadores
	° ′ ″	m	
Formentera.......	38. 39. 56.	0,9929760	Biot, Arago, Chaix.
Figeac..........	44. 36. 45.	0,9934578	Biot, Mathieu.
Bourdeaux........	44. 50. 26.	0,9934530	Biot, Mathieu.
Clermont.........	45. 46. 48.	0,9935822	Biot, Mathieu.
Paris...........	48. 50. 14.	0,9938666	Biot, Mathieu, Bouvard.
Dunkerque.......	51. 2. 10.	0,9940802	Biot, Mathieu.

Suppondo que todas estas observações, merecem confiança egual, convém procurar para as constantes A e B valores que se fundamentam no complexo de todas ellas, isto é, que melhor representem a reunião das seis mencionadas observações. Conseguiremos isto pelo *methodo dos menores quadrados*, como praticou Mathieu, pela fórma seguinte:

Se tivermos os valores de sen^2 L para todos os pontos em que as observações são feitas, a expressão analytica $A + B$ sen^2 L representará em cada ponto o comprimento do pendulo: subtrahindo esta expressão do comprimento observado, as differenças E_1, E_2, E_3........, representarão os erros da observação e da hypothese elliptica. Formar-se-hão assim as seis equações de condição seguintes:

$$\begin{aligned}
\overset{\text{m}}{0{,}9929760} - A - B.\ \overset{\text{m}}{0{,}3903418} &= E_1\\
0{,}9934578 - A - B.\ 0{,}4932370 &= E_2\\
0{,}9934530 - A - B.\ 0{,}4972172 &= E_3\\
0{,}9935822 - A - B.\ 0{,}5136118 &= E_4\\
0{,}9938666 - A - B.\ 0{,}5667723 &= E_5\\
0{,}9940802 - A - B.\ 0{,}6045723 &= E_6
\end{aligned}$$

Determinaremos os valores de A e B de maneira que *a somma dos quadrados*

dos erros E_1, E_2, E_3...... *seja a mais pequena possivel.* Para isto formaremos as equações do *mimimum* em relação a A e B. Como o coefficiente de A é a unidade em todas as equações, a condição do *minimum* em relação a esta incognita será dada pela sua somma dividida por 6 e egualada a zero. Teremos assim

$$0{,}99356930 - A - B.\ 0{,}51095873 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

equação do *minimum* em relação a A.

Multiplicando cada uma das seis equações de condição pelo coefficiente de B na mesma equação, resulta

$$\begin{aligned}
&-0{,}38760004 + A.\ 0{,}3903418 + B.\ 0{,}15236672,\\
&-0{,}49001014 + A.\ 0{,}4932370 + B.\ 0{,}24328274,\\
&-0{,}49396192 + A.\ 0{,}4972172 + B.\ 0{,}24722494,\\
&-0{,}51031554 + A.\ 0{,}5136118 + B.\ 0{,}26379708.\\
&-0{,}56329572 + A.\ 0{,}5667723 + B.\ 0{,}32123084.\\
&-0{,}60099335 + A.\ 0{,}6045723 + B.\ 0{,}36550767.
\end{aligned}$$

Sommando todas estas quantidades, dividindo a somma por 6 e egualando-a a zero, teremos

$$-0{,}50769612 + A.\ 0{,}51095873 + B.\ 0{,}26556833 = 0 \ldots \quad (4)$$

equação do *minimum* em relação a B.

A eliminação de B entre as equações (3) e (4) dá:

$$+0{,}03278523 - A.\ 0{,}03308588 = 0$$

donde se tira

$$A = 0^{m}{,}99091604.$$

Depois acha-se facilmente

$$B = 0^{m}{,}00519270.$$

Portanto o comprimento absoluto do pendulo deduzido das experiencias precedentes, será, em geral,

$$c = 0^{m}{,}99091604 + 0^{m}{,}00519270 \text{ sen}^2 L \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Esta formula reproduz com muita aproximação os comprimentos do pendulo da tabella antecedente, como se mostra no quadro seguinte:

Nome dos logares	Comprimento do pendulo observado, depois de reduzido etc.	Comprimento do pendulo calculado pela formula (a)	Differenças
	m	m	m
Formentera..................	0,9929760	0,9929429	— 0,0000331
Figeac.........................	0,9934578	0,9934772	+ 0,0000195
Bourdeaux.....................	0,9934530	0,9934979	+ 0,0000449
Clermont........................	0,9935822	0,9935831	+ 0,0000009
Paris............................	0,9938666	0,9938591	— 0,0000075
Dunkerque......................	0,9940802	0,9940554	— 0,0000248

Apesar destes resultados, ainda não podemos dizer que a formula (a) se accommoda o melhor possivel á figura geral da terra: para isto é preciso que as constantes A e B sejam deduzidas de grande numero de observações do pendulo dispostas de maneira que comprehendam, quanto puder ser, os pontos mais afastados do nosso planeta. Mas como é possivel que nos dois hemispherios não haja egual achatamento, trataremos primeiro do hemispherio do norte, tomando para base do nosso trabalho as observações ahi praticadas, e por nós conhecidas, que sejam mais exactas e mais bem dispostas em relação ao methodo que vamos seguir. Estas observações são:

Estações	Latitudes	Longitudes contadas de Paris	Comprimentos observados depois de reduzidos, etc.	Nome dos observadores
	° ′ ″	° ′ ″	m	
Spitzberg........	79. 49. 58.	9. 20. 6. O.	0,9960356	Sabine.
Groeland.........	74. 32. 19.	21. 10. 21. O.	0,9957484	Sabine.
Hammerfest......	70. 40. 5.	21. 25. 21. E.	0,9955405	Sabine.
Unst............	60. 45. 25.	3. 6. 11. O.	0,9949458	Biot.
Leith............	55. 58. 37.	2. 32. 5. O.	0,9945311	Biot.
Londres.........	51. 31. 8.	2. 20. 24. O.	0,9941236	Kater, Sabine.
Dunkerque.......	51. 2. 10.	0. 2. 22. E.	0,9940802	Biot, Mathieu.
Paris...........	48. 50. 14.	0. 0. 0.	0,9938666	Biot, Mathieu.
New-York.......	40. 42. 43.	76. 23. 51. O.	0,9931689	Sabine.
Formentera.......	38. 39. 56.	0. 50. 0. O.	0,9929760	Biot Arago.
Jamaica..........	10. 56. 7.	79. 14. 27. O.	0,9914739	Sabine.
Serra Leôa.......	8. 29. 28.	15. 35. 55. O.	0,9910953	Sabine.

M. Saigey para determinar as constantes A e B sujeitou estes dados e alguns outros, incluindo os obtidos no hemisperio do sul, ao *methodo dos menores quadrados*. Nós deixando agora este methodo pelas razões que exporemos adiante, combinaremos dois a dois os mais bem dispostos dos precedentes valores, deduzindo por meio das formulas (1) e (2) tantas constantes A e B quantas forem as combinações; tomando depois a media.

Levando ao fim, com todo o cuidado, os calculos de 38 combinações, achamos os seguintes resultados, depois de despresarmos 8 muito discordantes:

Combinações	A	B
	m	m
1.ª Serra-Leoa e Spitzberg...........	0,9909816	0,0052166
2.ª » Hammerfest..............	0,9909837	0,0051176
3.ª » Groeland..............	0,9909835	0,0051284
4.ª » Unst..............	0,9909818	0,0052066
5.ª » Leith..............	0,9909827	0,0051656
6.ª » Londres..............	0,9909836	0,0051241
7.ª » Dunkerque..............	0,9909844	0,0051219
8.ª » Formentera..............	0,9909840	0,0051031
9.ª » Jamaica..............	0,9909822	0,0051857
10.ª Jamaica e Spitzberg..............	0,9909790	0,0052192
11.ª » Hammerfest..............	0,9909892	0,0051115
12.ª » Unst..............	0,9909800	0,0052090
13.ª » Leith..............	0,9909843	0,0051633
14.ª » Dunkerque..............	0,9909890	0,0051130
15.ª Formentera e Spitzberg..............	0,9909116	0,0052889
16.ª » Hammerfest..............	0,9909742	0,0051283
17.ª » Unst..............	0,9909036	0,0053093
18.ª » Leith..............	0,9909293	0,0052433
19.ª » Londres..............	0,9909622	0,0051588
20.ª » Dunkerque..............	0,9909641	0,0051543
21.ª Dunkerque e Hammerfest..............	0,9909916	0,0051088
22.ª » Spitzberg..............	0,9908342	0,0053681
23.ª Leith e Spitzberg..............	0,9908735	0,0053246
24.ª Unst e Spitzberg..............	0,9909460	0,0052536
25.ª New-York e Spitzberg..............	0,9909245	0,0052755
26.ª » Unst..............	0,9909184	0,0052898
27.ª » Leith..............	0,9909536	0,0052093
28.ª » Groeland..............	0,9909893	0,0051232
29.ª » Londres..............	0,9909504	0,0052142
30.ª Londres e Groeland..............	0,9909741	0,0051396
Valores medios..............	0,99095899	0,00519247

Parece-nos que os valores medios de A e B, assim deduzidos, devem satisfazer melhor á configuração geral do hemispherio do norte do que se fossem achados pelo methodo dos menores quadrados. As razões em que nos fundamos são as seguintes:

1.ª Analysando as grandes operações geodesicas feitas em diversos paizes, reconhece-se que a figura da terra apresenta em alguns pontos fortes anomalias que a fazem desviar do ellipsoide de revolução, que é a forma que se lhe attribue nos calculos e que lhe cabe em geral; o mesmo tem logar pelo que respeita á sua densidade. Portanto, se em qualquer destas localidades se fizerem observações de pendulo, os comprimentos obtidos virão mais fortes ou mais fracos conforme o sentido das anomalias ou perturbações: estes comprimentos entrando no calculo dos menores quadrados vão alterar as constantes A e B, dando-lhes um valor que não convém á fórma geral da terra; em quanto que empregando o methodo exposto, isto é, combinando duas a duas as observações mais afastadas em latitude, qualquer anomalia deve reconhecer-se quasi sempre nos valores de A e B correspondentes, podendo ser desprezados os que mais se afastarem do termo medio. É por isso, que, nos calculos antecedentes, de trinta e oito combinações só aproveitamos os resultados de trinta.

2.ª Além das perturbações na forma e densidade da terra, podem dar-se em alguns logares erros mais fortes que os ordinarios, quer na determinação do comprimento do pendulo, quer na latitude correspondente. Estes erros, não podendo ser reconhecidos pelo methodo dos menores quadrados, alteram tambem os valores de A e B, em quanto que pelo methodo precedente podemos atenuar os seus effeitos.

Por estes motivos e pela harmonia que apresentam os resultados da ultima tabella, parece-nos que não sahiremos muito fóra da verdade concluindo que no hemispherio do norte o comprimento absoluto do pendulo é,

$$c = \overset{\text{m}}{0{,}99095899} + \overset{\text{m}}{0{,}00519247}.\ \text{sen}^2 L \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Tratando agora do hemispherio do sul, as observações de que temos noticia mais afastadas do equador são as que seguem:

Estações	Latitudes	Longitudes contadas de Paris	Comprimentos de pendulo observados depois de reduzidos etc.	Observadores
	° ′ ″	° ′ ″	m	
Ilhas Malouinas.........	51. 31. 44.	60. 40. 51. O.	0,99412947	Duperrey.
Cabo da Boa-Esperança..	33. 55. 15.	16. 9. 45. E.	0,99256846	Freycinet.
Port-Jackson...........	33. 51. 39.	148. 50. 0. E.	0,99258794	Duperrey.

Suppondo que A, ou o comprimento do pendulo no equador, é já conhecido na equação (b), e entrando na mesma equação com estes elementos, achamos para B os tres seguintes valores dados pelas tres observações, a saber:

1.ª (Ilhas Malouinas).............. $B = \overset{\text{m}}{0{,}0051724}$
2.ª (Cabo da Boa Esperança)......., $B = 0{,}0051682$
3.ª (Port-Jackson)................. $B = 0{,}0052471$

Valor medio.......... $B = 0{,}00519590$.

Como este valor medio de B differe muito pouco do ultimamente achado, que entra na equação (b), não temos razão para suppor no hemispherio austral um achatamento differente do que existe no hemispherio do norte: portanto a formula (b) poderá ser empregada em toda a superficie da terra.

Já dissemos que M. Saigey tinha applicado o methodo dos menores quadrados a todas estas observações, que deixamos mencionadas, e a algumas outras, para deduzir os valores das constantes. A equação a que chegou foi a seguinte:

$$c = 0{,}\overset{m}{9}9102557 + 0{,}\overset{m}{0}0507188 \text{ sen}^2 L.$$

Esta formula, que se encontra em varios tratados de physica e de geodesia, differe muito sensivelmente da nossa (b).

Não queremos de modo algum diminuir a importancia e merecimento do trabalho de M. Saigey, que talvez se aproxime mais da verdade, comtudo entendemos que a formula (b) não é destituida de fundamento; e até, deduzindo pelas duas formulas antecedentes o comprimento do pendulo nos differentes logares em que foram feitas observações directas de mais confiança, achamos que os valores dados pela equação (b) se aproximam mais do comprimento observado, na maior parte dos casos, que os deduzidos da formula de M. Saigey. *

Por exemplo: as observações na ilha de Rawak, que está na latitude sul 0° 1′ 35″, e que por isso se pode considerar como debaixo do equador, dão para o comprimento do pendulo 0,^{m}9909584; fazendo o calculo pela nossa formula achamos em resultado 0,^{m}9909590, e pela de M. Saigey temos 0,^{m}9910256. A differença, no 2.° caso, é consideravel, no 1.°, é insignificante. O contrario, e em muito maior escala, acontece na ilha de França, onde parece existir uma grande perturbação na densidade da terra, perturbação que se torna assim mais sensivel.

Poderiamos apresentar uma grande tabella de comparações, mas não julgamos isso necessario.

Depois de justificados os valores dados ás constantes A e B, applical-os-hemos á determinação do achatamento da terra.

Da theoria da attracção *(Mechanica celeste, tomo 2.° n.° 34)* deduz-se que o achatamento terrestre $\frac{1}{p}$ é dado pela equação

$$\frac{1}{p} = 0{,}0086505 - \frac{B}{A}.$$

Ora sendo $A = 0{,}99095899$, e $B = 0{,}00519247$, temos

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{293{,}19}.$$

Este valor, um pouco mais fraco que $\frac{1}{p} = \frac{1}{282}$ achado por meio dos elementos

* Na determinação dos coefficientes A e B poderiamos entrar com maior numero de observações, que de facto existem; porém com isso pouco maior rigor obteriamos, e o trabalho seria extremamente augmentado.

de M. Saigey, aproxima-se muito de $\frac{1}{294,73}$ que é dado pela reunião de quasi todas as operações geodesicas conhecidas, segundo os calculos de MM. Bessel e Struve *. Assim, as observações do pendulo e as medidas geodesicas estão completamente de accordo no que diz respeito á figura geral da terra.

Applicaremos finalmente a formula (b) á determinação da gravidade, que geralmente se costuma designar por g.

Demonstra-se em mechanica que se em um tempo T um pendulo c faz N oscillações, existe a seguinte relação:

$$T = N\pi\sqrt{\frac{c}{g}}, \text{ donde } g = \frac{c\,\pi^2 N^2}{T^2};$$

sendo $\pi = 3,14159265\ldots\ldots.$

* M. Bessel (Astronomische Nachrichten n.° 438) dá para o grão do meridiano um comprimento medio de 57013,11 ∓ 1,92 toesas, e acha para o achatamento

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{1}{299,15 \mp 3,15}.$$

Este illustre geometra baseia os seus calculos em 10 arcos de meridiano medidos em differentes paizes pelas operações geodesicas. Parece, comtudo, que a incerteza nas dimensões da terra dadas por Bessel é consideravelmente maior que a indicada pelos erros provaveis que elle achou. Para chegar a resultados mais precisos sobre este ponto, executou M. Struve um calculo provisorio do grande arco total de 25° 20′ 8,5″, entre as latitudes 45° 20′ 2,8″ e 70° 40′ 11,3″, que deu entre os dois parallelos uma distancia de 1447792 toesas. Depois comparou este arco com o arco total das Indias orientaes prolongado pelo coronel Ewerest até uma extensão de 21° 21′ 17,0″, desde 8° 9′ 31,1″ até 29° 30′ 48,1″ de latitude. A combinação dos dois arcos conduziu ao valor de 57023,52 ∓ 1,44 para o grão do meridiano, e de

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{1}{291,97 \mp 2,42}$$

para o achatamento.

Comparando porém estas quantidades com os algarismos analogos de M. Bessel, vê-se que os dois grandes arcos (russo e indico) deram pela sua extensão valores mais precisos das dimensões da terra. Entrando finalmente em calculo com os dois resultados, de Bessel e Struve, e tendo em vista os erros provaveis respectivos, achou este ultimo geometra

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{1}{294,73 \mp 1,72}.$$

Tal valor, posto que não seja inteiramente definitivo é comtudo, segundo cremos, o mais moderno e de mais confiança: a verdade não póde afastar-se delle além de estreitissimos limites.

Porém como temos tratado do comprimento de um pendulo de tempo medio que faz uma só oscillação em um segundo, é $T = 1$, $N = 1$, e por consequencia

$$g = c\pi^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Logo, conhecendo para uma dada latitude o comprimento do pendulo, acharemos por meio da equação (5) o valor de g correspondente.

Para Lisboa temos:
Latitude do observatorio de marinha $= 38^\circ\ 42'\ 16''$; portanto o pendulo calculado pela formula (b) será

$$c = \overset{\text{m}}{0},99298928;$$

e, introduzindo este valor na equação (5) teremos a gravidade, ou

$$g = \overset{\text{m}}{9},80041$$

Temos até aqui tratado esta questão suppondo que a superficie da terra se confunde com o prolongamento do nivel das aguas medias do oceano; porém como os logares do continente em que desejamos conhecer o valor de g se elevam a differentes alturas acima deste nivel, modificaremos a formula (5) em ordem a que satisfaça a todos os casos da pratica.

Tomando a equação (b), e considerando que $\operatorname{sen}^2 L = \frac{1}{2}(1 - \cos 2L)$, resulta

$$c = \overset{\text{m}}{0},99095899 + \overset{\text{m}}{0},00259624\,(1 - \cos 2L);$$

e como $g = \pi^2 c$, teremos,

$$g = \overset{\text{m}}{9},780373188 + 0,025623862\,(1 - \cos 2L)$$

ou $$g = 9,80599705\,(1 - 0,00261308 \cos 2L).$$

Ora, chamando g_a a gravidade correspondente a qualquer altitude h, r o raio medio do espheroide terrestre, d a densidade media do mesmo espheroide, e d' a densidade da camada terrestre elevada acima do nivel dos mares, demonstra-se que (veja-se a *Mechanica* de M. Poisson) existe a relação seguinte:

$$g = g_a \left(1 + \frac{2\,h}{r} - \frac{3\,d'\,h}{2\,d\,r}\right);$$

e podendo-se em geral fazer $d' = {}^1/_2\, d$, será

$$g = g_a \left(1 + \frac{5\,h}{4\,r}\right).$$

Por isso a gravidade em qualquer ponto da terra terá por expressão

$$g_a = \frac{9{,}80599705^{\mathrm{m}} \; (1 - 0{,}00261308 \cos 2\,L)}{1 + \frac{5\,h}{4\,r}},$$

ou
$$g_a = \frac{9{,}80599705^{\mathrm{m}} \; (1 - 0{,}00261308 \cos 2\,L)}{1 + 0{,}000000196.\;h}$$

pondo por r o seu valor que é $6367520,^{\mathrm{m}}4$, segundo os modernos calculos.

Sendo o valor da gravidade, ou g, um elemento de grande importancia na balistica, na hydraulica, e em outros ramos das sciencias physico-mathematicas, julgamos conveniente formar a taboa seguinte, fundada nas formulas antecedentes. E uma taboa que tendo duas entradas, nos dá o valor de g para todas as latitudes desde 30° até 60°, e para as altitudes desde 0^{m} até 1.600 metros.

TABOA DOS VALORES DA GRAVIDADE

Latitudes	ALTITUDES									Diff.ª em latitude
	0 m	200 m	400 m	600 m	800 m	1000 m	1200 m	1400 m	1600 m	
°	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
30	9,79319	9,79280	9,79242	9,79203	9,79165	9,79127	9,79089	9,79050	9,79012	78
31	9,79397	9,79358	9,79320	9,79281	9,79243	9,79205	9,79167	9,79128	9,79090	80
32	9,79477	9,79438	9,79400	9,79361	9,79323	9,79285	9,79247	9,79208	9,79170	81
33	9,79558	9,79519	9,79481	9,79442	9,79404	9,79366	9,79328	9,79289	9,79251	82
34	9,79640	9,79601	9,79563	9,79524	9,79486	9,79448	9,79410	9,79371	9,79333	83
35	9,79723	9,79684	9,79646	9,79607	9,79569	9,79531	9,79493	9,79454	9,79416	84
36	9,79807	9,79768	9,79730	9,79691	9,79653	9,79615	9,79577	9,79538	9,79500	86
37	9,79893	9,79854	9,79816	9,79777	9,79739	9,79701	9,79663	9,79624	9,79586	87
38	9,79980	9,79941	9,79903	9,79864	9,79826	9,79788	9,79750	9,79711	9,79673	87
39	9,80067	9,80028	9,79990	9,79951	9,79913	9,79875	9,79837	9,79798	9,79760	88
40	9,80155	9,80116	9,80078	9,80039	9,80001	9,79963	9,79925	9,79886	9,79848	88
41	9,80243	9,80204	9,80166	9,80127	9,80089	9,80051	9,80013	9,89974	9,79936	89
42	9,80332	9,80293	9,80255	9,80216	9,80178	9,80140	9,80102	9,80063	9,80025	89
43	9,80421	9,80382	9,80344	9,80305	9,80267	9,80229	9,80191	9,80152	9,80114	89
44	9,80510	9,80471	9,80433	9,80394	9,80356	9,80318	9,80280	9,80241	9,80203	90
45	9,80600	9,80561	9,80523	9,80484	9,80446	9,80408	9,80370	9,80331	9,80293	89
46	9,80689	9,80650	9,80612	9,80573	9,80535	9,80497	9,80459	9,80420	9,80382	89
47	9,80778	9,80739	9,80701	9,80662	9,80624	9,80586	9,80548	9,80509	9,80471	89
48	9,80867	9,80828	9,80790	9,80751	9,80713	9,80675	9,80637	9,80598	9,80560	89
49	9,80956	9,80917	9,80879	9,80840	9,80802	9,80764	9,80726	9,80687	9,80649	89
50	9,81045	9,81006	9,80968	9,80929	9,80891	9,80853	9,80815	9,80776	9,80738	88
51	9,81133	9,81094	9,81056	9,81017	9,80979	9,80941	9,80903	9,80864	9,80826	87
52	9,81220	9,81181	9,81143	9,81104	9,81066	9,81028	9,80990	9,80951	9,80913	86
53	9,81306	9,81267	9,81229	9,81190	9,81152	9,81114	9,81076	9,81037	9,80999	86
54	9,81392	9,81353	9,81315	9,81276	9,81238	9,81200	9,81162	9,81123	9,81085	84
55	9,81476	9,81437	9,81399	9,81360	9,81322	9,81284	9,81246	9,81207	9,81169	84
56	9,81560	9,81521	9,81483	9,81444	9,81406	9,81368	9,81330	9,81291	9,81253	82
57	9,81642	9,81603	9,81565	9,81526	9,81488	9,81450	9,81412	9,81373	9,81335	81
58	9,81723	9,81684	9,81646	9,81607	9,81569	9,81531	9,81493	9,81454	9,81416	80
59	9,81803	9,81764	9,81726	9,81687	9,81649	9,81611	9,81573	9,81534	9,81496	78
60	9,81881	9,81842	9,81804	9,81765	9,81727	9,81689	9,81651	9,81612	9,81574	
Diff.ª em altit.ᵉ	39	38	39	38	38	38	39	38		