ESTUDOS

SOBRE

NIVELAMENTO

POR

F. A. DE BRITO LIMPO

LISBOA
IMPRENSA NACIONAL
1870

ESTUDOS

SOBRE

NIVELAMENTO

POR

F. A. DE BRITO LIMPO

Boralione
Perm.

LISBOA
IMPRENSA NACIONAL
1870

PRIMEIRA PARTE

THEORIA DO NIVELAMENTO

Imaginemos que a superficie do mar se prolonga pelos continentes, e que o espaço interior é todo occupado por agua tranquilla, porém actuada pelas forças da *gravidade;* os pontos exteriores d'esta massa fluida, que suppomos isolada no espaço em equilibrio, constituem o que se denomina *superficie de nivel,* sendo tambem assim chamadas aquellas que lhe são parallelas, isto é, similhantes e concentricas. O fio de prumo, ou a direcção da gravidade, confunde-se com a *normal* a qualquer ponto d'estas superficies, e por isso é perpendicular ao plano tangente a esse ponto. Este plano é o *horisonte*[1].

[1] Resulta dos principios de hydrostatica que a superficie livre de um fluido em equilibrio tem por equação differencial

$$Xdx + Ydy + Zdz = o \qquad (a)$$

aonde x, y, z representam as coordenadas de uma molecula qualquer dm solicitada pelas forças acceleratrizes de que X, Y e Z são as componentes parallelas aos eixos rectangulares. Partindo d'esta equação, conclue-se que a resultante das forças X, Y, Z é perpendicular á superficie livre do fluido. Com effeito, tracemos sobre esta superficie uma curva qualquer, e seja ds o seu elemento differencial correspondente ao ponto cujas coordenadas são x, y, z, de sorte que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sejam os cosenos dos angulos que a tangente á curva, n'este mesmo ponto, faz com as parallelas aos eixos coordenados. Chamemos R á resultante das forças X, Y, Z; teremos que os cosenos dos angulos formados pela direcção de R com as ditas parallelas, serão expressos respectivamente por

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}.$$

Se a grande massa fluida não fosse dotada de movimento de rotação, as direcções da gravidade ou do fio de prumo concorreriam todas no seu centro, e as camadas de nivel seriam esphericas; se existir porém, como existe, o movimento de rotação uniforme em torno de um eixo central, teremos tambem equilibrio quando a força centrifuga for muito pouco consideravel em relação á centripeta; mas a superficie que definimos será ellipsoidal, e as direcções do fio de prumo, como normaes que são, não passam todas pelo centro de figura[1].

Ora, dividindo a equação (a) por Rds, resulta

$$\frac{X}{R}\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{Y}{R}\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{Z}{R}\left(\frac{dz}{ds}\right)=o;$$

o que prova que a direcção da força R e a tangente á curva que se traçou arbitrariamente sobre a superficie do fluido, são perpendiculares uma á outra, e por consequencia, que esta direcção *coincide com a normal* ao ponto que se considera. É esta uma propriedade importante da superficie livre dos liquidos em equilibrio.

A equação (a) subsistirá ainda, quando se exercer uma pressão constante sobre esta superficie, porque a differencial de uma constante é igual a zero.

Fazendo applicação ás forças da natureza, resulta do que fica dito, que a direcção da gravidade é sempre perpendicular á superficie das aguas tranquillas, e que este resultado é independente das hypotheses sobre a figura da terra.

1 Integremos a equação (a) da nota antecedente, partindo da primeira hypothese estabelecida no texto. Para isto fixemos no centro a origem das coordenadas do elemento dm, a distancia do ponto (x, y, z) á origem, terá por expressão $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Chamando r esta distancia e a a força de attracção que actua sobre dm, resultará

$$X=a\frac{x}{r},\ Y=a\frac{y}{r},\ Z=a\frac{z}{r};$$

pondo estes valores na equação (a), teremos

$$\frac{a}{r}(xdx+ydy+zdz)=o,$$

ou, integrando,

$$x^2+y^2+z^2=C$$

equação de uma esphera: logo a superficie do fluido será espherica.

Se a massa fluida girar uniformemente em torno de um eixo fixo, Em um fluido pesado de pequena extensão, como é, por exemplo, o liquido contido n'um vaso qualquer, as direcções da gravidade podem julgar-se parallelas, attendendo á grandeza do raio terrestre; por isso, quando o liquido estiver em equilibrio, as suas moleculas superiores e livres formam um plano horisontal[1].

Considerando o espheroide terrestre tal como actualmente existe, podemos, sem erro sensivel para o nosso caso, suppor a *superficie de nivel*, que rigorosamente temos definido, como sendo similhante á que é determinada pelo nivel das aguas tranquillas do oceano; aindaque, por causa da attracção das grandes montanhas, e por fortes perturbações na densidade da terra, aconteça amiudadas vezes que o fio de prumo se não confunda completamente com a normal ao ellipsoide medio, isto é, ao ellipsoide que nos calculos geodesicos representa o nosso planeta[2].

como suppomos na segunda hypothese, teremos alem das componentes X, Y, Z, as que provém da força centrifuga que resulta d'esta rotação. Em tal caso a equação commum a todas as superficies de nivel será

$$Xdx + Ydy + Zdz + W^2(xdx + ydy + zdz) = o,$$

chamando W a velocidade angular constante e relativa a todos os pontos do fluido, e suppondo que o eixo dos z se confunde com o de rotação.

Se o liquido for completamente homogeneo, a força centrifuga pouco consideravel, e a força d'attracção na rasão inversa do quadrado das distancias, demonstra-se por uma analyse transcendente, a qual não tem aqui logar, que a figura do fluido é necessariamente a de um elipsoide de revolução cujo achatamento se determina pela relação entre a grandeza da força centrifuga e centripeta no equador.

[1] N'este caso podemos fazer na equação (a) da nota 1.ª

$$X = o,\ Y = o,\ Z = g,$$

designando g a gravidade. Integrando temos $Z = C$, o que significa que a superficie superior do fluido em equilibrio é plana e parallela ao plano dos xy, isto é, ao plano horisontal.

[2] Os arcos terrestres, medidos pelos processos geodesicos, poucas vezes se confundem perfeitamente com os que são determinados pelos methodos astronomicos. Veja-se *Géodésie de Francœur*, *n.º* 234. *Arc du méridien de* 25° 20 *entre le Danube et la Mer glaciale*, par W. Struve, etc.

Quando nivelâmos temos por fim achar distancias normaes a uma *superficie de nivel* ou de *referencia*. A determinação d'estas distancias constitue o *nivelamento*.

Se dois ou mais pontos não pertencem á mesma superficie de nivel, as quantidades que exprimem a distancia mais curta entre as superficies d'este genero, respectivas a cada ponto, chamam-se *differenças de nivel* ou *de altitude*[1].

Nas grandes operações, como são, por exemplo, os nivelamentos geodesicos, toma-se para referencia um nivel geral e constante, que póde ser o das aguas medias do oceano; porque, segundo a theoria do celebre auctor da *Mechanica celeste*, este nivel teria logar com pequenissima differença se não fosse o effeito das marés produzido pela acção do sol e da lua.

Quando os pontos de que se requer a differença de nivel se acham ligados por meio de grandes triangulos cujos vertices se avistam reciprocamente, é mais facil fazer o nivelamento pelos processos geomorphicos. Determinaremos primeiramente as linhas geodesicas que ligam os pontos propostos; depois, com instrumentos adequados, como são os theodolitos ou os *universaes*, e calculando o effeito do poder refrangente da atmosphera, determinaremos os angulos formados pela linha de prumo do ponto de estação com a recta que liga este com o observado; a trigonometria, ou uma analyse mais elevada, nos dará por fim a differença de altitude requerida, quer consideremos a terra como esphera, quer lhe attribuâmos a fórma de um ellipsoide (Nota A).

É evidente que as differenças de nivel assim obtidas estão sujeitas a varias causas de erro, porquanto as linhas de prumo ou as perpendiculares a ellas podem não ser rigorosamente determinadas; os angulos podem envolver tambem alguns erros, provenientes, já das pontarias, já das leituras, já da imperfeição da graduação dos instrumentos; o calculo do poder

[1] Quando a superficie de nivel a que referimos as distancias normaes for a das aguas medias do oceano, estas distancias chamam-se *altitudes*; porém se tomarmos para referencia outra superficie de nivel, as distancias normaes a essa superficie costumam chamar-se *cotas*.

refrangente da atmosphera poderá ser algumas vezes deficiente[1].

Apesar de tudo isto, são tão perfeitos os apparelhos e tão apurados os methodos de observar e os systemas de calculo, que os nivelamentos d'este genero são susceptiveis de grande perfeição (Nota B).

A pressão das camadas de ar sendo conhecida pelas indicações barometricas, e sendo uma funcção da altitude das mesmas camadas, faz com que tambem se tenha empregado o barometro nos grandes nivelamentos; porém só em casos especiaes podemos ter grande confiança nas operações de tal genero.

Não é muito facil estabelecer os limites que separam o nivelamento geodesico do topographico; é costume chamar nivelamento topographico áquelle em que, por causa da proximidade dos pontos, não é necessario corrigir as observações do effeito da refracção e da curvatura da terra. Comtudo acontece muitas vezes que em operações meramente topographicas seja necessario metter em conta estas correcções. No nivelamento geodesico é sempre necessario attender á refracção atmospherica e á curvatura da terra.

[1] Diversas tentativas se têem feito para determinar o coefficiente de refracção em qualquer ponto da terra, por meio de observações meteorologicas ahi executadas; porém as formulas deduzidas para este fim baseiam-se quasi todas em dados empyricos. O celebre astronomo W. Struve, fundado em muitas e variadas experiencias, e depois de extensos calculos, chegou a uma expressão da *refracção terrestre normal*, que parece representar com pequeno erro a verdadeira lei d'este phenomeno. (Veja-se o nosso folheto intitulado *Tábuas para o calculo das refracções terrestres*, etc.) Os observadores têem achado em differentes paizes os seguintes valores para o coefficiente medio da refracção atmospherica ahi existente:

Portugal (dr. Folque)	0,080
Prussia (Bessel e Baeyer)	0,0685
Russia (Struve)	0,062
Hespanha (Ibañez)	0,0714

NOTA A

Consideremos o *triangulo hypsometrico*, que é formado: 1.º, pela corda K do *arco de nivel* comprehendido entre as verticaes de duas estações em que se observaram as distancias zenithaes reciprocas $\triangle$, $\triangle'$, e correspondendo á mais baixa das mesmas estações; 2.º, pela recta que liga os dois pontos de mira; 3.º, pela differença de nivel E que procurâmos, isto é, pela porção da vertical do ponto mais alto, comprehendida entre este ponto e o dito arco de nivel que passa pelo ponto mais baixo. Se $\triangle$ e $\triangle'$ forem as verdadeiras distancias zenithaes, e se designarmos por C o angulo formado pelas verticaes das duas estações, teremos que os angulos respectivamente oppostos aos lados K, E serão

$$90^\circ - \left(\frac{C}{2} + \frac{\triangle' - \triangle}{2}\right), \text{ e } \frac{\triangle' - \triangle}{2}.$$

Podemos, para mais simplicidade, fazer igual a D este segundo angulo, e applicando em seguida as regras de trigonometria, acha-se

$$K \operatorname{sen} D = E \cos\left(D + \frac{C}{2}\right),$$

d'onde resulta

$$E = \frac{K \operatorname{sen} D}{\cos\left(D + \frac{C}{2}\right)}. \qquad (1)$$

N'esta equação, que é fundamental, e que resolve o problema em toda a sua generalidade, necessitâmos conhecer o valor de C, D e K.

Para a determinação do angulo C podemos, sem erro apreciavel na pratica (veja-se a Geodesia de M. Puissant, tom. 1.º, n.º 231) considerar o *arco zero* de nivel entre as duas estações, como sendo o de um circulo cujo raio seja igual ao de curvatura da linha geodesica que liga as mesmas estações. Ora pela triangulação podemos obter a corda K_0 d'essa linha geodesica, e por isso, chamando R o raio de curvatura, será

$$K_0^2 = 2\,R^2 - 2\,R^2 \cos C = 4\,R^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\,C,$$

d'onde

$$K_0 = 2\,R \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,C$$

ou

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\,C = \frac{K_0}{2\,R}. \qquad (2)$$

O raio da curvatura é dado pela seguinte equação, em que vae envolvida a fórma ellipsoidal da terra,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \cos A; \qquad (3)$$

sendo ρ' a normal, ρ o raio de curvatura do meridiano, e A o azimuth da linha geodesica, tudo referido ao ponto medio da mesma linha. (Veja-se *Die Kustenvermessung von I. I. Baeyer*, § 105.º)

Para determinar o angulo D, sabemos que elle é a semi-differença das distancias zenithaes reciprocas, ou

$$D = \frac{\Delta' - \Delta}{2}.$$

Mas estas distancias zenithaes são as verdadeiras, emquanto que as *observadas* z, z' são diminuidas pelo effeito da refracção, de umas certas quantidades que designaremos por δz e $\delta z'$; isto é, será

$$\Delta = z + \delta z, \quad \Delta' = z' + \delta z',$$

ou

$$D = \frac{(z' + \delta z') - (z + \delta z)}{2}.$$

A expressão theorica da refracção obtem-se, considerando o mesmo triangulo hypsometrico que serviu de base ao nosso calculo; pois

$$(z + \delta z) + (z' + \delta z') = 180^\circ - C,$$

e fazendo $\delta z' = \delta z$, isto é, iguaes as refracções (o que para este caso supporemos sem inconveniente), será

$$\delta z = \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}(z + z' - 180^\circ),$$

ou

$$\frac{\delta z}{C} = \frac{\frac{1}{2} C - \frac{1}{2}(z + z' - 180^\circ)}{C} = n \qquad (4)$$

ou, finalmente,

$$\delta z = nC.$$

n é o *coefficiente de refracção*, que poderá ser dado pela experiencia (4), ou calculado por formulas mais ou menos approximadas da verdade, como já indicámos.

Falta-nos agora conhecer K.

Dissemos que, pela triangulação, obtinhamos K_0, ou a corda da linha geodesica entre as duas estações, a qual linha, como sabemos, é tomada sobre o espheroide terrestre, isto é, sobre a *superficie zero* de nivel, que serve de origem de contagem para as altitudes. Ora, se conhecermos a altitude approximada h da estação mais baixa, o que, em muitos casos, será facil, e se designarmos ainda por R o raio de curvatura, teremos

$$R : K_0 :: R + h : K = \frac{K_0 (R + h)}{R}$$

ou

$$K = K_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right) \qquad (5)$$

Temos pois tudo quanto é necessario para calcular pela equação (1) a differença de nivel entre duas estações que se avistem reciprocamente, e cuja distancia seja conhecida.

Assim: pela observação tomamos os valores de z e z' e as indicações meteorologicas nas duas estações; com a formula (3) calculâmos o raio de curvatura, e em seguida o valor de C pela formula (2); com os dados meteorologicos e por meio das formulas conhecidas (por exemplo, as de Struve), acharemos o valor do coefficiente de refracção para cada uma das estações, e obteremos

$$\delta z = nC, \quad \delta z' = n'C;$$

com os valores de $z + \delta z$ e $z' + \delta z'$ calcularemos $\triangle$ e $\triangle'$, e por consequencia D; finalmente a formula (5) dará o valor de K. No calculo do raio R de curvatura, em que entra ρ, ρ', e $\cos A$, é necessario conhecer, aindaque grosseiramente, a latitude e azimuth (medios) da linha geodesica, o que não offerece difficuldade. Se a terra for considerada como espherica, o raio de curvatura será constante para todas as estações.

Temos assim o problema completamente resolvido.

Simplificações. Se não conhecermos senão uma distancia zenithal, por exemplo z, é necessario que a formula (1) seja modificada para este caso. Temos

$$\triangle' = 180^\circ - \triangle + C,$$

e por consequencia

$$\tfrac{1}{2}(\triangle' - \triangle) = 90^\circ - \triangle + \tfrac{1}{2}C = 90^\circ - \left(\triangle - \tfrac{1}{2}C\right) = D.$$

Este valor introduzido na equação (1) vae transforma-la em

$$E = \frac{2R \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \operatorname{cotg}\left(\triangle - \frac{1}{2}C\right)}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \operatorname{cotg}\left(\triangle - \frac{1}{2}C\right)};$$

o que se consegue desenvolvendo o denominador da mesma equação e considerando que $2R \operatorname{sen} \frac{1}{2}C = K$.

Pondo agora por $\triangle$ o seu valor $z + \delta z$, dado pela observação, virá

$$E = \frac{2R \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \operatorname{cotg}\left(z + \delta z - \frac{1}{2}C\right)}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}C \operatorname{cotg}\left(z + \delta z - \frac{1}{2}C\right)}, \qquad (6)$$

formula tambem rigorosa e em que o denominador designará sempre uma differença.

A equação (1), e por consequencia a (6), é susceptivel de varias simplificações, que dependem dos differentes casos que na pratica se apresentam. Para que a ordem dos desprezos necessarios para essas simplificações se torne evidente, daremos outra fórma ás referidas equações.

Com effeito, sendo na formula (1) a quantidade E necessariamente funcção de D, o theorema de Maclaurin, dá

$$E=\left(\frac{dE}{dD}\right)D+\left(\frac{d^2}{dD^2}\right)\frac{D^2}{2}+\left(\frac{d^3E}{dD^3}\right)\frac{D^3}{2.3}+\ldots\ldots$$

serie na qual os valores dos coefficientes differenciaes devem corresponder a $D=o$.

Effectuando as successivas differenciações e substituindo os valores de

$$\left(\frac{dE}{dD}\right),\ \left(\frac{d^2E}{dD^2}\right),\ \left(\frac{d^3E}{dD^3}\right),\ \ldots\ldots$$

resulta

$$E=\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}D+\frac{K\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}D^2+\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\left(\frac{1}{3}+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C\right)D^3+\ldots\ldots$$

mas, sendo

$$D=\operatorname{tg}D-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3D+\ldots\ldots$$

teremos definitivamente, desprezando como insensiveis os termos superiores á segunda ordem,

$$E=\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{tg}D+\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{tg}\frac{1}{2}C\operatorname{tg}^2D;$$

Nas questões de nivelamento geodesico de primeira ordem, quando K for grande, isto é, exceder, por exemplo, 30 kilometros, os valores de $\triangle$ e $\triangle'$ pouco differirão entre si, porque as distancias zenithaes observadas, z e z', serão mui proximas de 90^o. N'este caso tg^2D será pequenissima quantidade, que multiplicada por $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$, tambem mui pequena na pratica da geodesia, fará com que o segundo termo do segundo membro d'esta equação seja na maior parte das vezes inferior aos erros de observação. Poderemos pois empregar sem inconveniente, em vez de (1), a seguinte formula

$$E=\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{tg}D=\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z'+\delta z'-z-\delta z)\qquad(7)$$

Quando K é relativamente pequeno, isto é, menor que 10 ou 12 kilometros, além do desprezo já effectuado poderemos fazer $\cos\frac{1}{2}C=1$, e $\delta z=\delta z'$, o que dará

$$E=K\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z'-z),\qquad(8)$$

formula mui simples e sufficientemente exacta para os usos da pequena geodesia.

Vejamos agora como poderemos, tambem em certos casos da pratica, tornar mais commoda para o calculo a equação (6), que dá as differenças de nivel com uma só distancia zenithal.

É evidente que o denominador pouco differe da unidade, por isso

$$E = 2\,R\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,C\,\mathrm{cotg}\left(z + \delta z - \tfrac{1}{2}\,C\right)$$

$$= \frac{K}{\cos\frac{1}{2}\,C}\,\mathrm{cotg}\left(z + \delta z - \tfrac{1}{2}\,C\right) \qquad (9)$$

ou, introduzindo o coefficiente n de refracção,

$$E = \frac{K}{\cos\frac{1}{2}\,C}\,\mathrm{cotg}\left(z + \left(n - \tfrac{1}{2}\right)C\right).$$

O signal de E depende do da cotangente, o que é talvez desnecessario dizer.

Esta formula, effectuando alguns desprezos, insignificantes em operações secundarias, transforma-se n'outra pelo modo seguinte: Seja $\left(n - \frac{1}{2}\right)\,C = s$, teremos

$$\mathrm{cotg}\left(z + \left(n - \tfrac{1}{2}\right)C\right) = \mathrm{cotg}\,(z + s) = \frac{1 - \mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}\,s}{\mathrm{tg}\,z + \mathrm{tg}\,s};$$

mas sendo na pratica muito pequeno o angulo s, podemos tomar o arco pela tangente, e teremos

$$\mathrm{cotg}\,(z + s) = \frac{1 - s\,\mathrm{tg}\,z}{\mathrm{tg}\,z\,(1 + s\,\mathrm{cotg}\,z)}.$$

Multiplicando, agora, tanto o numerador como o denominador por $(1 + s\,\mathrm{cotg}\,z)^{-1}$, desenvolvendo, e parando nos termos de primeira ordem em relação a s, temos

$$\mathrm{cotg}\,(z + s) = \mathrm{cotg}\,z - \frac{s}{\mathrm{sen}^2\,z};$$

e pondo por s o seu valor, considerando que podemos tomar $R\,.\,C = K$, em vez de $2\,R\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,C = K$, virá

$$E = \frac{K\,\mathrm{cotg}\,z}{\cos\frac{1}{2}\,C} + \frac{1}{2}\,\frac{K^2}{R\,\mathrm{sen}^2\,z} - \frac{n\,K^2}{R\,\mathrm{sen}^2\,z},$$

ou, fazendo $\cos\frac{1}{2}\,C = 1$, $\mathrm{sen}^2\,z = 1$, o que é quasi sempre permittido nas operações de geodesia secundaria, chegaremos finalmente á expressão

$$E = K\,\mathrm{cotg}\,z + \frac{K^2}{2\,R} - \frac{nK^2}{R},$$

em que os termos $\frac{K^2}{2\,R}$ e $\frac{nK^2}{R}$ representam e põem na evidencia os effeitos da curvatura terrestre e da refracção.

Se tomarmos para n um valor constante, assignarmos para R o valor da normal do parallelo medio, e fizermos $\frac{\frac{1}{2}-n}{R}=q$, será

$$E=K\cot z+qK^2 \quad (10)$$

formula muito commoda, e que o sr. general Filippe Folque, nosso illustre e mui estimado chefe, emprega na pequena geodesia, tendo previamente organisado tábuas para maior facilidade do calculo.

Resumindo:

A differença de nivel entre dois pontos determinados geodesicamente poderá ser dada com rigor pelas equações (1) ou (6), conforme as distancias zenithaes observadas forem reciprocas ou não.

Se quizermos fazer alguns desprezos insignificantes e facilitar o calculo, podemos na alta geodesia empregar, para os mesmos casos, as formulas (7) ou (9), e na pequena geodesia as formulas (8) ou (10).

A doutrina que n'esta nota fica exposta não é nova, e para muitos será desnecessaria; mas quizemos deduzi-la e expo-la em fórma clara e systematica, para ser facilmente comprehendida por aquelles que desejarem possuir as principaes noções de nivelamento.

Falta-nos ainda dizer que temos supposto que os centros dos instrumentos medidores das distancias zenithaes estão coincidindo com os proprios pontos de mira, o que raras vezes terá logar na pratica. Mas, chamando dh a differença de nivel entre o instrumento e o ponto de mira da estação junta, em que observamos a distancia zenithal z para um ponto exterior, collocado a uma distancia que designaremos ainda por K, será

$$\operatorname{sen}\delta=\frac{dh\operatorname{sen}z}{K};\ \text{ou}\ \delta=\frac{dh\operatorname{sen}z}{K\operatorname{sen}1''},$$

equação em que δ representa a correcção angular devida á deslocação do instrumento.

NOTA B

Se indicassemos aqui os progressos do nivelamento geodesico e da geodesia em geral, poderiamos fallar do nosso paiz; mas não queremos que nos alcunhem de aduladores de uma pessoa illustre e de uma corporação a que estamos ligados, tomando por lisonja o que seria só verdade. Tendo de fallar de outros estados, não é necessario (com gosto o dizemos) transpor os Pyrenéos, ou acampar junto do Sena, do Rheno, do Neva ou do Tamisa; basta-nos o Manzanares, basta chegarmos a Madrid. Encontramos ahi, na *commissão do mappa de Hespanha* todos os melhoramentos e progressos; e como em Portugal se não conhecem muitas vezes as cousas da nação vizinha, citaremos uma excellente obra, que o leitor póde consultar com a maior vantagem para instruir-se nos aperfeiçoamentos da geodesia pratica. Intitula-se *Base central de la triangulacion geodésica de España*, por D. Carlos Ibañez, D. Frutos Saavedra, D. Fernando Monet e D. Cesáreo Quiroga. Ahi se acham descriptos os modernos instrumentos, os mais perfeitos systemas de observação, e os mais rigorosos methodos de calculo para a compensação dos pequenos erros que ainda resultam dos dados experimentaes, e que andarão sempre annexos á imperfeição humana.

SEGUNDA PARTE

DETERMINAÇÃO DAS DIFFERENÇAS DE NIVEL PELOS PROCESSOS TOPOGRAPHICOS

Não trataremos mui detidamente do *nivelamento trigonometrico*, porque se reduz, em topographia, á medição do angulo α de um triangulo, no qual um dos lados é proximamente horisontal e conhecido, e outro, o que representa a differença de nivel, calculado pela formula (equação (10) da primeira parte)

$$\delta N = E = K \operatorname{tg} \alpha + qK^2, \qquad (1)$$

sendo muitas vezes desnecessario applicar-lhe a correcção de refracção e de curvatura da terra, correcção que está expressa no termo qK^2.

A differença de nivel δN, assim obtida, póde envolver erros provenientes de varias causas, como já notámos. É uma d'ellas a inexactidão da distancia horisontal K, que podemos aqui fazer igual a K_0, ou mesmo, á linha de nivel que une o ponto de estação com a vertical do ponto observado; comtudo, quando estas distancias são conhecidas com facilidade, costumam os nivelamentos d'esta especie empregar-se amiudadas vezes e com vantagem, por causa da sua rapidez, se o fim que se tem em vista é conhecer a differença de altitude entre pontos não mui proximos e dispostos ao acaso. O configurado do terreno, nos levantamentos topographicos de pequena escala, baseia-se quasi sempre em taes nivelamentos.

O apparelho empregado na determinação de α tem geralmente o nome de *eclimetro*. Este instrumento é munido quasi sempre de um oculo, ou luneta, cujo eixo optico determinado pelo reticulo, é parallelo a um limbo graduado com o qual forma systema. Umas vezes o limbo e o oculo estão solidamente ligados entre si, e giram em torno de um eixo que passa pelo centro do mesmo limbo e perpendicularmente a elle; n'este caso os *nonios* ou *micrometros* estão fixos; outras vezes é o oculo que, ligado invariavelmente com a alidade, gira sobre um limbo fixo, porém sempre em torno do eixo que passa pelo seu centro.

O nivel póde tambem ser ligado ao oculo e acompanhar-lhe por isso todos os movimentos, ou ser independente d'elle e ligado á parte fixa do instrumento.

Para que um eclimetro [1] satisfaça a todas as condições que a sciencia recommenda, é conveniente: 1.º, que o limbo seja um circulo inteiro; 2.º, que o oculo possa executar, pela fórma já indicada, revoluções completas desde 0° até 360°; 3.º, que o nivel, dotado de grande *sensibilidade*, esteja ligado ás peças fixas do instrumento, e, por isso, independente do oculo.

Com estas condições, sendo bem graduado o limbo, e os nonios ou micrometros perfeitos, é certo que os angulos de *altura* ou de *depressão* podem ficar isentos de todos os erros systematicos ou regulares, se empregarmos na medição de taes angulos o methodo das inversões. (Veja-se o nosso folheto intitulado *Simplificação das rectificações dos theodolitos* — Lisboa, 1861.)

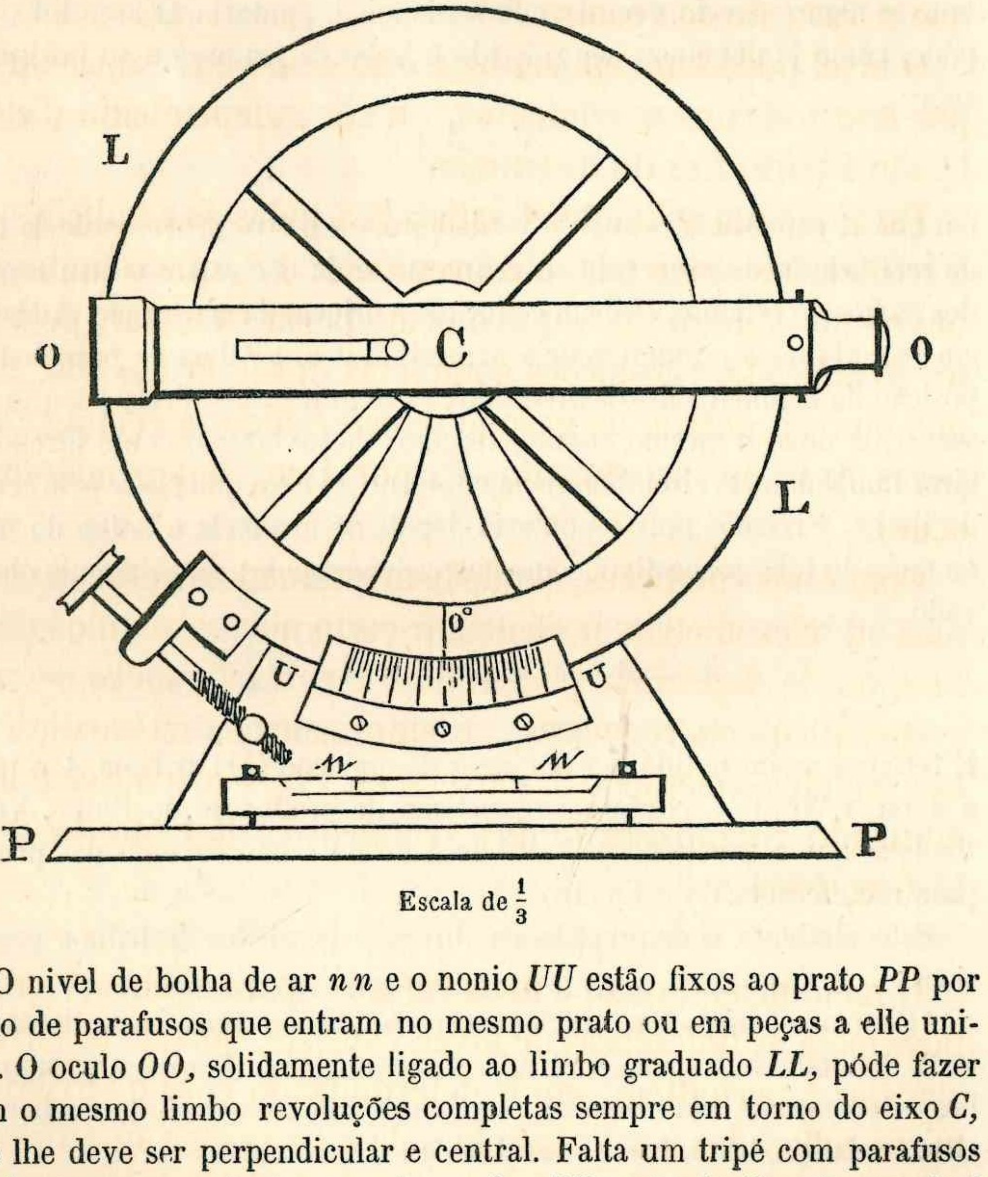
O meio mais directo e mais rigoroso para conhecer em topographia as differenças de nivel, consiste, quando as circumstancias o permittem, em ir determinando com o auxilio das miras collocadas verticalmente sobre os pontos que têem de ser comparados, a altura relativa das linhas de nivel apparente ou dos raios visuaes parallelos ao horisonte. Chama-se a isto *nivelamento geometrico*.

[1] Com o nome de *eclimetro* designâmos todo o instrumento que mede angulos no plano vertical, referidos á linha de prumo ou ao horisonte, isto é, distancias zenithaes ou alturas. Os universaes de Repsold, de Troughton, de Ertell, etc., têem a propriedade de eclimetros; é costume comtudo

Supponhamos que duas linhas de nivel apparente, obtidas com um instrumento adequado, partindo desde o mesmo pon-

dar este nome a um instrumento exclusivamente topographico e só destinado a medir angulos de *altura* ou de *depressão*. A figura (1.ª) representa em alçado um eclimetro dos mais perfeitos para uso da topographia.

Figura 1.ª



Escala de $\frac{1}{3}$

O nivel de bolha de ar *n n* e o nonio *UU* estão fixos ao prato *PP* por meio de parafusos que entram no mesmo prato ou em peças a elle unidas. O oculo *OO*, solidamente ligado ao limbo graduado *LL*, póde fazer com o mesmo limbo revoluções completas sempre em torno do eixo *C*, que lhe deve ser perpendicular e central. Falta um tripé com parafusos nivelantes para sustentar o systema, dar differentes inclinações ao nivel e facilitar as inversões; mas este instrumento, acompanhando a prancheta, quasi sempre serve ella de tripé, porque o prato póde assentar na parte superior da mesma. Se não houver prancheta, poderemos facilmente adaptar-lhe outro tripé.

Montado na prancheta o eclimetro, eis a maneira de observar com elle: gira-se com a prancheta azimuthalmente, depois de bem nivelada, até que o limbo do eclimetro esteja proximamente na direcção do objecto to, interceptam na altura a e b duras miras [1] collocadas, uma sobre o ponto A, e outra sobre o ponto B; a quantidade $(a-b)$

que temos a observar (suppomos que se tem verificado pelos processos ordinarios se o oculo descreve um plano vertical quando gira em torno do eixo perpendicular ao limbo, estando horisontal a prancheta em que assenta o prato). Em seguida, por meio do oculo, dirige-se o raio visual ao objecto, e chama-se a bolha do nivel ao meio do respectivo tubo, se houver algum desvio, rectificando-se depois a pontaria. O arco lido, que póde, como já dissemos, ser referido á linha de prumo ou ao horisonte, será

$$A' = A + e$$

em que A representa o angulo verdadeiro, e e o erro proveniente da falta de rectificação do nivel fixo ao eclimetro, e de não estarem bem centrados os fios do reticulo, ou bem collocada a origem da graduação. Andando em seguida meia circumferencia azimuthal com a tábua da prancheta, a posição do eclimetro ficará invertida; e, se quizermos n'esta posição observar de novo o mesmo angulo, teremos de inverter o oculo fazendo-o girar tambem meia circumferencia em torno do eixo que passa pelo centro do limbo. Fixemos pois a pontaria depois de chamada a bolha do nivel ao meio do tubo respectivo, como antecedentemente; será o angulo observado

$$A'' = A - e; \text{ e portanto } A = \frac{A' + A''}{2}$$

E teremos assim obtido o valor de α da equação (1); porque A é igual a α ou a $90^\circ \pm \alpha$, conforme o systema de graduação do limbo. Vê-se tambem que a exactidão do valor de A ou de α não depende das principaes rectificações do eclimetro.

Este methodo é empregado na direcção geral dos trabalhos geodesicos.

[1] Chama-se *mira*, em nivelamento geometrico, uma haste desempenada de madeira, a qual, graduada exactamente e collocada a prumo sobre o terreno ou sobre marcos, nos faculta um meio facil de conhecer a altura relativa das linhas de nivel dadas.

Costumam dividir as miras em duas grandes classes: *miras de alvo* e *miras fallantes*. Na primeira é o ponto de mira sempre o mesmo, e por isso deve subir ou descer na haste segundo as indicações do observador, sendo facil depois conhecer a sua altura sobre o terreno; na segunda é a propria graduação que, traçada ao longo da haste, nos indica essa altura pelo ponto em que o raio visual a intercepta.

São mui diversos os systemas de graduar as miras, para que haja nas operações de nivelamento rapidez e exactidão. Não cabe aqui, nem é esé a differença de nivel apparente que diz respeito aos pontos *A* e *B*. Do mesmo modo se deslocarmos depois o instrumento e o pozermos entre *B* e outro ponto, *C*, seria $(b-c)$ a differença de nivel entre os pontos *B* e *C*; e assim por diante, até obtermos tantas differenças parciaes quantas forem necessarias, podendo ser tudo referido a uma superficie geral, inferior ou superior aos pontos *A*, *B*, *C*, etc.

Differindo a linha de nivel apparente da linha de nivel verdadeiro pelo facto de serem estas linhas parallelas, a primeira a um plano, e a segunda a uma superficie curva, e partindo ambas do mesmo ponto, é evidente que as quantidades $(a-b)$, $(b-c)$, etc., devem soffrer alguma correcção, para que representem realmente as differenças de nivel entre *A* e *B*, *B* e *C*, etc. Isto, no caso de não ter sido collocado o instrumento a meio dos pontos de mira, tomados dois a dois, porque assim tudo seria compensado.

Já dissemos que no nivelamento topographico era em alguns casos desnecessario attender á curvatura da terra e á refracção; porém, sempre que forem convenientes estas correcções, poderemos considerar as superficies de nivel como concentricas a uma esphera.

Vejamos pois como havemos de obter a *correcção de esphericidade*.

Se no ponto *A* (figura 2.ª), imaginarmos uma tangente ao arco *A D*, a parte *B D* da seccante *C B* será a altura do nivel apparente *A B* acima do nivel verdadeiro *A D*. Conheceremos *B D* considerando que qualquer tangente *A B* é meia propor-

sencial fallar d'elles. Cada observador deve adoptar o que melhor convem aos differentes casos da pratica, sendo comtudo vantajoso que depois de adoptado um systema de miras se empregue o mesmo no decurso de todo o trabalho. A graduação costuma ser em metros e fracções de metro; e para ser conservada a verticalidade, quando se fazem as pontarias emprega-se um nivel annexo á mira, ou um fio de prumo, ou finalmente a oscillação forçada da propria mira sobre o seu ponto de apoio, sem desviar-se do plano vertical que passa pela estação do observador. Parece-nos mais conveniente um prumo ou pendulo com haste de metal e de 15 a 25 centimetros de comprido, porque, sendo pequeno e pesado, pouco oscillará com o vento, podendo ser facilmente resguardado.

2.

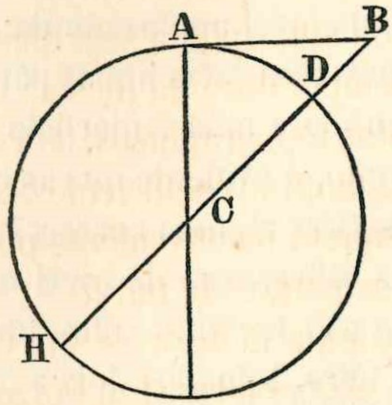
cional entre a seccante inteira BH e a sua parte exterior BD, isto é

$$BH : AB :: AB : BD$$

d'onde resulta

$$\overline{BD}^2 + 2CD.BD = \overline{AB}^2$$

Figura 2.ª



Para calcular rigorosamente BD seria necessario resolver uma equação de segundo grau; mas como BD é sempre, na pratica da topographia, uma quantidade extremamente pequena em relação ao diametro $2CD$ da terra, podemos, sem erro sensivel, reduzir a formula precedente a

$$BD = \frac{\overline{AB}^2}{2CD}$$

O raio terrestre, segundo os modernos calculos, é igual a 6367520 metros; portanto, conhecida a distancia AB, facilmente se calculará a correcção BD de que se trata. Esta quantidade, que designaremos por f, deve subtrahir-se á differença de nivel apparente.

Tratemos agora do effeito da refracção.

Chama-se *ponto de mira* aquelle a que dirigimos um raio visual. O ponto de mira apresenta-se quasi sempre aos olhos do observador em um logar que, por causa da refracção, não é o que verdadeiramente occupa; este desvio da imagem manifesta-se no sentido vertical (pelo menos é esse que nos interessa) e faz com que o objecto pareça mais elevado do que realmente está. D'aqui resulta que B, se é um objecto observado do ponto A, será visto em B', na direcção da tangente á curva descripta pelo raio luminoso AB.

É pois necessario conhecer o valor da refracção atmospherica para se poder determinar a altura exacta do ponto de mira acima do nivel verdadeiro. Esta refracção está sujeita a tantas variações, que é quasi impossivel estabelecer regras precisas a seu respeito (1.ª parte). No entretanto, aindaque o poder refrangente da atmosphera seja maior ou menor, conforme a pressão e temperatura da mesma atmosphera, é costume em nivelamentos topographicos, attribuir, como já dissemos, um valor constante ao coefficiente de refracção; porque d'essa hypothese nenhum inconveniente póde resultar, attendendo á distancia dos pontos de mira.

Para cada paiz costuma deduzir-se um coefficiente medio, resultado de muitas observações. Em Portugal podemos suppor este coefficiente igual a 0,08; e será portanto a refracção angular r expressa pela formula (equação (4) da primeira parte)

$$r = (0{,}08)\ C,$$

em que C representa o angulo que entre si fazem as duas verticaes, correspondentes uma ao ponto de estação e outra ao ponto de mira. Com esta formula obtem-se o valor de r em graus ou partes de grau; mas é mais commodo para os usos topographicos obte-lo em metros. Para isto devemos considerar que o angulo OAB (figura 3.ª), formado por uma corda e a tangente, tem por medida metade do angulo C.

Ora, representando por AO a linha de nivel apparente, sendo Oo o desvio vertical que a refracção faz soffrer ao ponto de mira o, e sendo os angulos OAB, OAo, muito pequenos, temos

$$BO : oO :: \text{angulo } OAB : \text{angulo } OAo$$

e fazendo $BO = f$, correcção de esphericidade que já sabemos determinar, $oO = r_m$, será

$$f : r_m :: \tfrac{C}{2} : (0{,}08)\ C;$$

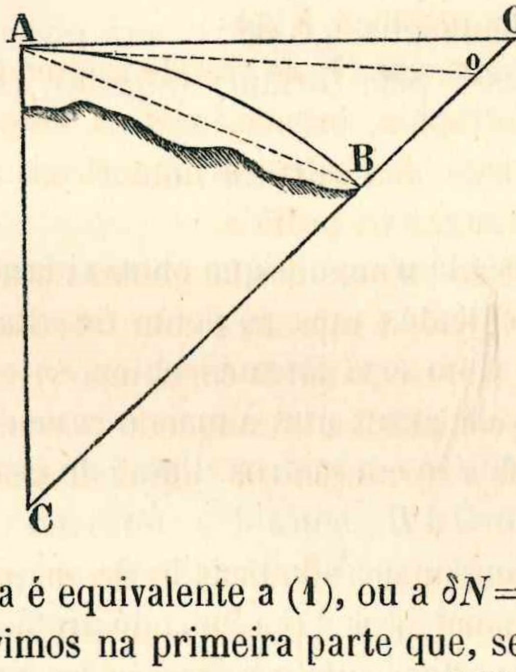
logo $r_m = (0,16) f$

Isto quer dizer que o ponto de mira se eleva, por effeito da refracção atmospherica, uma quantidade igual á altura do nivel apparente sobre o nivel verdadeiro multiplicada pelo numero constante 0,16, ou em geral, pelo dobro do coefficiente da refracção. O effeito d'esta, ou r_m, deve pois juntar-se á differença de nivel apparente, assim como o da esphericidade se deve subtrahir. Se designarmos por δA tal differença de nivel, teremos

$$\delta N = \delta A + r_m - f \qquad (2)$$

sendo δN a verdadeira differença de nivel entre o ponto de estação do instrumento e o ponto observado.

Figura 3.ª



Esta formula é equivalente a (1), ou a $\delta N = K \operatorname{tg} \alpha + qK^2$. Com effeito: vimos na primeira parte que, segundo as hypotheses estabelecidas, tinhamos (equação (10))

$$\delta N \text{ ou } E = K \operatorname{cotg} z + \frac{K^2}{2R} - \frac{nK^2}{R}$$

$$= K \operatorname{cotg} z + qK^2;$$

ora sendo $z = 90^\circ \pm \alpha$, temos $K \operatorname{cotg} z = K \operatorname{tg} \alpha$, quantidade que representâmos aqui por δA, ou differença de nivel apparente. Alem d'isto temos, nas mesmas hypotheses,

$$f=\frac{\overline{AB}^2}{2\,CD}=\frac{K^2}{2\,R}$$

$$r_m=(0{,}16)f=2\,n\,f=\frac{nK}{R}$$

logo as duas equações (1) e (2) são identicas, e por isso em topographia a differença de nivel entre dois pontos, n'um dos quaes estaciona o instrumento, será sempre representada por

$$\delta N=K\operatorname{tg}\alpha+qK^2.$$

Se o nivelamento for geometrico temos sempre $\alpha=o$, e por isso $\delta N=qK^2$, o que é de facil intuição, suppondo tomada a differença de nivel entre o ponto de estação e aquelle a que se dirigiu a pontaria; mas este eleva-se quasi sempre sobre o de referencia uma certa quantidade, que a mira apparentemente indica, e que equivale a $K\operatorname{tg}\alpha$.

Sendo pois a formula (1) de grande importancia em nivelamentos de topographia, organisámos as tábuas que vão no fim, para facilidade dos calculos numericos, entre certos limites, mais communs na pratica.

A primeira dá os valores das tangentes naturaes desde 0° a 5°, com intervallos de 1 minuto e com tabellas para o calculo das differenças. Apresentâmo-la como um *specimen* de tábuas com grande approximação, abrangendo pouco espaço.

A segunda dá a correcção qK^2 até á distancia de 10 kilometros.

São estas tábuas quasi identicas ás do sr. general Folque, citadas na primeira parte; porém, querendo nós destina-las para poderem tambem auxiliar os *nivelamentos geometricos de precisão*, levámos um pouco mais longe a approximação dos valores, tendo, por isso, a primeira d'ellas uma disposição bastante differente.

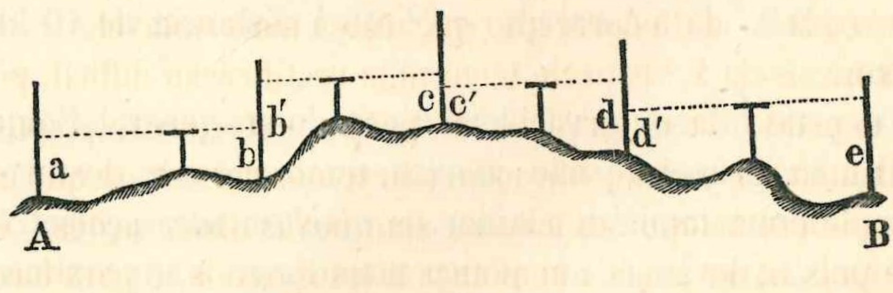
Convem notar que o valor de qK^2 é sempre positivo; mas como nos nivelamentos geometricos as differenças de nivel apparente são sempre (ou se julga serem) de pontos que estão abaixo da horisontal dada pelo nivel, acontece que são differenças realmente negativas, e por isso, não attendendo ao signal, deve-lhes ser subtrahido o valor de qK^2 para se obter a differença de nivel verdadeira, o que é conforme ao expresso na equação (2).

Conhecidos bem os principios antecedentes, a pratica d'este genero de nivelamento, para usos topographicos, não offerece difficuldade, logoque o instrumento empregado seja bom e que o topographo conheça perfeitamente o seu uso. Tudo se reduz a determinar as alturas em que a linha de nivel apparente corta as miras. Se a differença de nivel entre dois pontos A e B, ou $(A-B)$ se determinar de uma só estação, o nivelamento toma o nome de *simples;* porém se os dois pontos a nivelar estão fóra dos limites do raio visual, quer isto seja por causa das irregularidades do terreno, quer pela sua inclinação ou extensão, ha necessidade de os ligar por uma serie de nivelamentos simples, e a operação toma n'este caso o nome de ***nivelamento composto.***

Suppondo que se queria a differença de nivel δN entre A e B, (figura 4.ª), sendo necessario estacionar em E_1, E_2, E_3, E_4, o nivelamento composto dava

$$\delta N = (a - b) + (b' - c) + (c' - d) + (d' - e)$$

Figura 4.ª



Ás quantidades $a, b, b', c, c', d, d', e,$ devem applicar-se, sendo necessario, as correcções de refracção e esphericidade expressas em qK^2. Escusado é dizer que δN representa a somma algebrica de $(a-b)$, $(b'-c)$, $(c'-d)$, $(d'-e)$.

Falta finalmente um apparelho que dê, pelo modo mais simples e directo, linhas horisontaes exactas, que podem obter-se ou com perpendiculares a um fio de prumo, ou fazendo passar o raio visual tangente á superficie de um liquido contido em cylindro recurvado e aberto nas suas extremidades proximamente horisontaes, ou por meio de uma tangente á parte superior de um tubo de vidro cheio em parte de alcool ou ether, e disposto de maneira que a bolha de ar, tendendo sempre a occupar os pontos mais altos do mesmo tubo, se colloque exactamente no meio d'elle. Um tal instrumento chama-se *nivel;* podendo por conseguinte haver tres classes de niveis, a saber: *de perpendiculo, de agua, e de bolha de ar* [1].

De todos os niveis os mais perfeitos são de bolha de ar munidos de oculo. Esta classe contém quatro especies principaes:

1.ª O oculo é fixo ao nivel e ao prato do instrumento (systema de Troughton, n.º 1).

2.ª O oculo é fixo sómente ao nivel por meio de parafusos ajustantes, e póde girar e inverter-se nas chumaceiras (systema de Troughton n.º 2, e *nivel parallelo*).

3.ª O oculo póde inverter-se e girar nas chumaceiras; porém é independente do nivel o qual está ligado ao prato (Casela, systema d'Egault).

4.ª O oculo é como na terceira especie, mas o nivel, sendo independente de todo o systema, póde inverter-se e assentar-se sobre os munhões do mesmo oculo (systema Lenoir, Brunner, Saleron).

Taes são as principaes especies. Diremos succintamente sobre cada uma d'ellas o que julgarmos mais notavel.

Os niveis da 1.ª especie têem uma rectificação difficil, porque depende da observação de pontos exteriores, e conseguida uma vez essa rectificação, não temos certeza de que ella continue por tempo sufficiente, sem novas observações. Não póde pois haver grande confiança n'estes niveis, e para haver alguma é necessario um trabalho impertinente. Publicámos já, como instructor da 9.ª cadeira da escola do exercito, um folheto (lithographado), em que demos noticia do uso e dos inconvenientes dos niveis d'esta especie.

Os da segunda especie têem tambem difficil a principal re-

[1] Os niveis de reflexão entram na classe dos de perpendiculo.

ctificação, e dependem da fallivel igualdade dos munhões, ou anneis do oculo, que assentam nas chumaceiras em fórma de Y. Devemos exceptuar d'estes inconvenientes o chamado *nivel parallelo,* de invenção moderna, o qual seria muito bom se não se fundasse n'uma hypothese que póde tambem falhar na pratica, e que vem a ser *a perfeita symetria nas paredes do tubo do nivel,* symetria que talvez não exista, quer por defeito da construcção, quer pela desigual dilatação devida ao calor.

Os da terceira especie têem a manobra difficil por ser necessario desmontar o oculo das chumaceiras para praticar a inversão, e o seu grau de certeza funda-se na igualdade dos munhões, que póde deixar de existir por differentes motivos. Já publicámos tambem na escola do exercito uma instrucção para o uso d'estes niveis, em que notámos as suas vantagens e defeitos.

Finalmente os da quarta especie approximam-se mais do ideal mathematico; porém, tendo o nivel amovivel, a sua manobra é morosa, e se a desigualdade dos munhões se manifestar, necessitaremos corrigir pelo desvio da bolha de ar os effeitos provenientes d'essa desigualdade, o que é sempre custoso e sujeito a enganos.

É evidente que se podessemos collocar sempre o nivel a igual distancia das duas miras, todos estes inconvenientes da falta de rectificação desappareceriam. Mas isto não só é algumas vezes impossivel, mas, sendo possivel, torna as operações de nivelamento extremamente morosas, augmentando muito o numero de estações.

Considerando tudo isto que fica dito, imaginámos um nivel em que, *sem dependencia de rectificações,* se eliminam *todos os erros systematicos,* e portanto os que resultam da desigualdade dos munhões, ou anneis do oculo, sendo alem d'isto de manobra facil e expedita. Este instrumento, construido já no instituto industrial de Lisboa, será por nós chamado *nivel de precisão,* e d'elle nos occuparemos na terceira e ultima parte d'estes estudos.

EXEMPLOS DE NIVELAMENTO TOPOGRAPHICO

Nivelamento trigonometrico. — Seja $K = 6536$ metros a distancia horisontal entre os pontos E e B, de que se requer a differença de nivel δN; seja $\alpha = +\, 3^\circ\, 4'\, 57''$ o angulo de altura medido; e supponhamos que o ponto de estação E, a que desejâmos referir a differença de nivel, está abaixo do centro do limbo do eclimetro uma certa quantidade h, que faremos aqui igual a $1^m,436$. Temos:

$$
\begin{array}{lrr}
\text{(Tábua I)}\ldots & \operatorname{tg}(3^\circ\, 4'\, 0'') = \ldots & 0{,}0535746 \\
 & 50'' \ldots\ldots & 2434 \\
 & 7'' \ldots\ldots & 341 \\
\hline
 & \operatorname{tg}\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}0538521
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrr}
 & K \operatorname{tg}\alpha = 6536 \times 0{,}0538521 = \ldots & \overset{m}{+\,351{,}977} \\
\text{(Tábua II)}\ldots & qK^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots & +\quad 2{,}818 \\
 & h = \ldots\ldots\ldots\ldots & +\quad 1{,}436 \\
\hline
 & \delta N = \ldots\ldots\ldots\ldots & 356{,}231
\end{array}
$$

Se tivessemos $\alpha = -\, 3^\circ\, 4'\, 57''$, isto é, se fosse angulo de depressão, teriamos:

$$
\begin{array}{rr}
K \operatorname{tg}\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots & \overset{m}{-\,351{,}977} \\
qK^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots & +\quad 2{,}818 \\
h = \ldots\ldots\ldots\ldots & +\quad 1{,}436 \\
\hline
\delta N = \ldots\ldots\ldots\ldots & -\,347{,}723
\end{array}
$$

Se o ponto E de referencia estivesse acima do centro do limbo do eclimetro, mudar-se-ía o signal de h, e, fazendo o calculo antecedente, teriamos

$$
\begin{array}{lr}
\delta N\ (\text{para } \alpha = +\, 3^\circ\, 4'\, 57'') \ldots\ldots & +\,353{,}359 \\
\delta N\ (\text{para } \alpha = -\, 3^\circ\, 4'\, 57'') \ldots\ldots & -\,349{,}159
\end{array}
$$

Nos angulos que a tábua I não abranger calcularemos $K \operatorname{tg}\alpha$ por logarithmos, o que é tambem extremamente facil.

Nivelamento geometrico. — São mui variadas as fórmas de registo para o nivelamento geometrico. Adoptaremos uma que, posto se afaste um pouco das estabelecidas, tem a vantagem de incluir a correcção qK^2 e não ser sujeita a enganos. Na columna das estações da mira os numeros entre parenthesis indicam as niveladas á rectaguarda ou *anteriores*. Suppomos que as niveladas são aqui o resultado de uma só pontaria; porém se forem a media de 2 ou mais, como acontece muitas vezes, a disposição do typo de registo póde ainda ficar a mesma, dispondo sómente maior numero de traços entre uma estação e a immediata. Eis o typo:

Estações		K	Leituras nas miras	qK²	Leituras correctas		Esclarecimentos
Nivel	Mira				Anteriores	Posteriores	
		m	m	m	m	m	
N.º 1	(1)	96,3	2,343	0,001	2,342		Origem, o marco 1
»	2	203,2	1,435	0,003		1,432	
N.º 2	(2)	127,0	2,620	0,001	2,619		
»	3	58,2	0,234	0,000		0,234	
N.º 3	(3)	327,6	3,105	0,007	3,098		
»	4	85,7	0,934	0,001		0,933	
N.º 4	(4)	260,8	2,970	0,005	2,965		
»	5	102,1	1,015	0,001		1,014	Terminou no marco 5
				Somma.....	m 11,024	m 3,613	

Vê-se facilmente que a differença de nivel entre o marco 1 e o marco 5 é... $11,024 - 3,613 = 7^m,411$, pois

$$(a-b)+(b'-c)+(c'-d)+(d'-e)=(a+b'+c'+d') \\ -(b+c+d+e),$$

o que quer dizer que, tomando as niveladas *anteriores* e *posteriores, a somma das differenças é igual á differença das sommas.*

TERCEIRA PARTE

I

DESCRIPÇÃO, USO E THEORIA DO NIVEL DE PRECISÃO

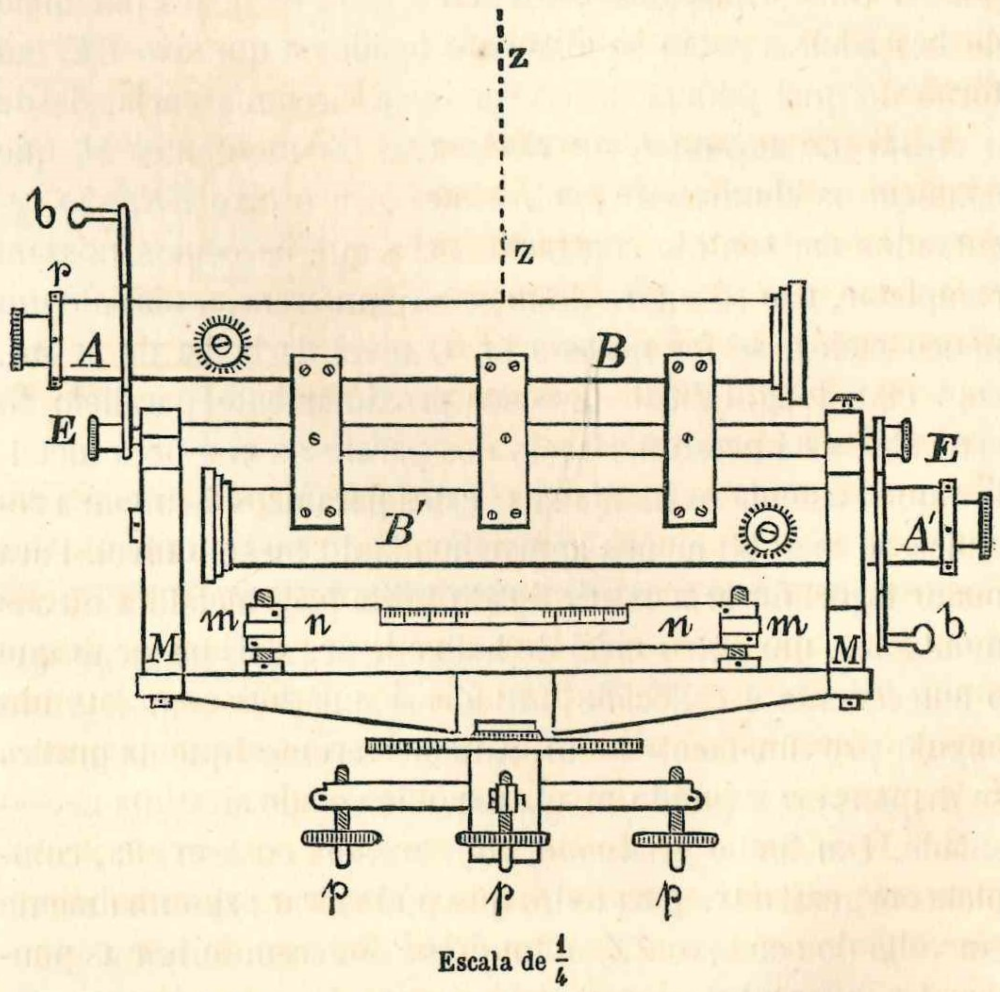
Descripção.—O nosso nivel distingue-se principalmente por ter dois oculos invertidos AB e $A'B'$, os quaes por meio de braçadeiras estão solidamente ligados a um eixo EE, em torno do qual podem descrever meia circumferencia, desde o *zenith* até ao *nadir*, ou vice-versa. Os montantes M, que contêem as chumaceiras sobre que gira o eixo EE, são recurvados em sentido contrario, para que os oculos possam completar, não só o giro de meia circumferencia, mas até um pouco maior, se for necessario. O nivel da bolha de ar nn, cujo eixo longitudinal deve ser proximamente parallelo ao eixo EE, está preso por meio dos parafusos m á peça metallica que sustenta os montantes; estes parafusos facultam a rectificação mais ou menos approximada do mesmo nivel. Para maior rigor, deveria existir ligado á dita peça metallica ou aos montantes, um outro nivel de bolha de ar, mais pequeno que o antecedente e collocado por fórma que faça com este um angulo proximamente recto. Adiante veremos que na pratica se dispensa o segundo nivel, por não ser de absoluta necessidade. Um limbo graduado, com bussola ou sem ella, completa em geral o systema todo, que póde girar azimuthalmente em volta do seu eixo ZZ, a fim de se poderem dirigir as pontarias a differentes pontos do horisonte. Este movimento azimuthal póde fazer-se parar, empregando o parafuso de pressão P; as pontarias ajustam-se depois com o parafuso Q de reclamo.

O tripé de madeira e o machinismo que sustenta o instrumento por intermedio de tres parafusos nivelantes *p*, são peças tão communs nos apparelhos topographicos, que é desnecessario descreve-las.

Os oculos invertidos são em tudo similhantes; têem dupla tiragem para graduar convenientemente a visibilidade tanto dos objectos externos como do reticulo. Este é composto de dois fios cruzados em angulo recto, e póde deslocar-se no plano dos mesmos e segundo qualquer das direcções cruzadas, empregando para isto os parafusos *r* pela fórma ordinaria.

As semi-revoluções em volta do eixo *EE* são executadas á

Figura 5.ª

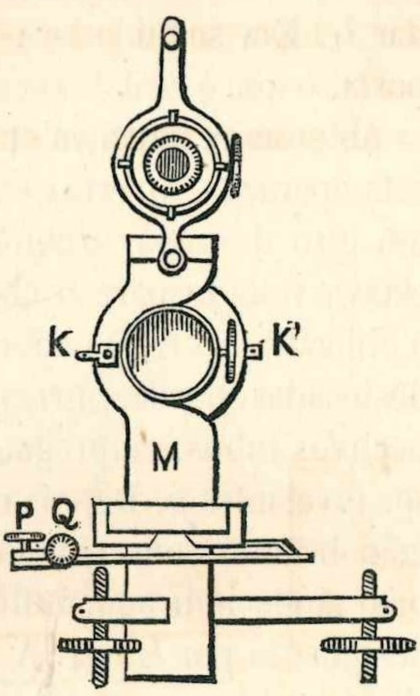


Escala de $\frac{1}{4}$

mão, tendo, para esse effeito, o cuidado de não tocar no systema, senão por intermedio dos botões *b*. Estes botões estão ligados ao eixo *EE* por um aro metallico, o qual, batendo nos parafusos de espera k ou k' dos montantes, serve tambem para limitar convenientemente o giro dos dois oculos. Assim não haverá receio de que no acto da observação recebam choque estes oculos ou se torçam as peças que os ligam entre si. Um pequeno parafuso de pressão faz parar o movimento rotatorio do eixo *EE*.

As figuras 5.ª e 6.ª representam em dois alçados o nivel descripto.

Figura 6.ª



Uso.—Para se alcançar com facilidade a inteira precisão que um tal instrumento faculta, deveremos, nas operações com elle executadas, ter em vista os seguintes preceitos que, em todo o caso, não são essenciaes para o bom exito do nivelamento:

1.º *Verificar, nos dois oculos, se o reticulo está collocado por fórma que os raios visuaes, determinados pelo cruzamento dos fios, sejam proximamente parallelos ao eixo EE, em torno do qual giram os mesmos oculos.* Para obter esta verificação dirige-se a pontaria a um objecto distante, depois gira-se com o oculo a meia revolução já mencionada; se o cruzamento dos fios tiver com este movimento pequena deslocação a respeito do objecto apontado, está bem o reticulo; se houver desvio muito consideravel, então por meio dos parafusos *r*, faremos mover o mesmo reticulo até que esse desvio se torne pequeno. Este processo é commum a um e outro oculo.

2.º *Verificar se as bolhas dos niveis se conservam proximamente caladas, quando fazemos tomar ao systema direcções differentes no sentido azimuthal.* No caso de haver grandes deslocamentos, depois de invertida a posição dos niveis, corrigir-se-hão essas differenças, desfazendo metade com os parafusos annexos, e a outra metade com os parafusos nivelantes. É necessario rectificar um nivel primeiro, depois o outro. Se o instrumento tiver um só nivel, como póde acontecer, a operação será mais simples.

3.° Depois de bem preparado todo o apparelho, tendo sempre cuidado de chamar as bolhas dos niveis ao meio dos respectivos tubos, dirigiremos a pontaria com um dos oculos, *AB* por exemplo, collocado na posição superior ou inferior, porém sempre de modo que o fio do reticulo esteja sensivelvelmente horisontal. Supponhamos que o oculo está na posição superior. Faz-se na mira a leitura, cujo valor designaremos por l_1. Em seguida leva-se o oculo á posição inferior ou opposta, o que é facil de reconhecer, e com outra pontaria e leitura obteremos outro valor que designaremos por l_2. Concluida esta operação, inverta-se azimuthalmente todo o systema com um giro de meia circumferencia; o oculo *A'B'* que até aqui estava voltado para o observador, ficará agora dirigido para o objecto; os niveis poderão apresentar as bolhas algum tanto deslocadas, porém obriga-las-hemos a voltar ao meio dos respectivos tubos, empregando para isto unicamente os parafusos nivelantes *p*. Depois manobrando com o oculo *A'B'*, como manobrâmos com o oculo *AB*, obteremos successivamente, e pelo modo indicado, outras duas leituras da mira, que serão designadas por l_3 e l_4. A quantidade

$$\frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{4}=L$$

representará, sem erro apreciavel na pratica, a altura em que tocaria na mira o prolongamento de um eixo medio *EE* em posição horisontal.

Theoria.—Imaginemos o instrumento em estação e reduzido á expressão mais simples, por modo que as suas peças principaes sejam tão sómente indicadas por linhas. Os montantes sobre que assenta o eixo *EE* são representados por *mE* e *m'E*; *ab* representa o raio visual determinado pelo reticulo do oculo *AB* na sua posição superior; *nn* figura o nivel com a bolha em meio do respectivo tubo. Façamos passar pelo centro d'esta bolha dois eixos rectangulares, *xy*, sendo o dos *x* horisontal. Suppondo agora, para maior generalidade, que o eixo de rotação azimuthal do instrumento forma com a linha de prumo, ou vertical, um angulo v, e que o raio visual dirigido pelo reticulo do oculo forma com o eixo dos x um angulo V_1; se chamarmos β o angulo que este raio visual faz com o prolongamento do eixo EE e α o formado entre o dito prolongamento e o horisonte, teremos, fig. 7.ª

$$V_1 = \alpha + \beta$$

Figura 7.ª

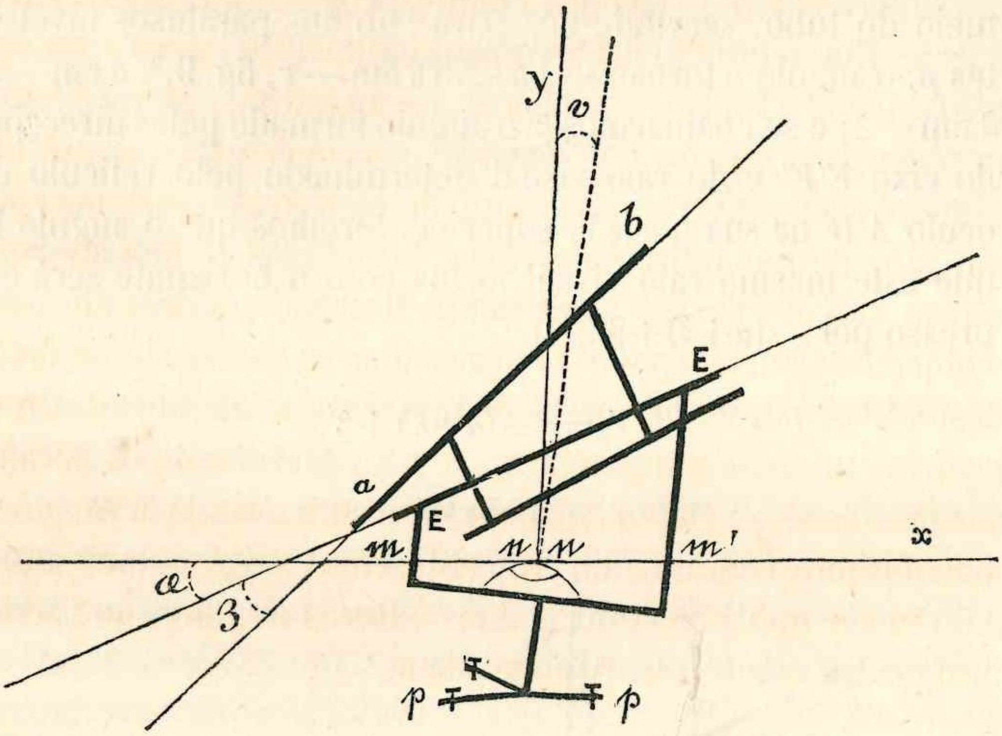
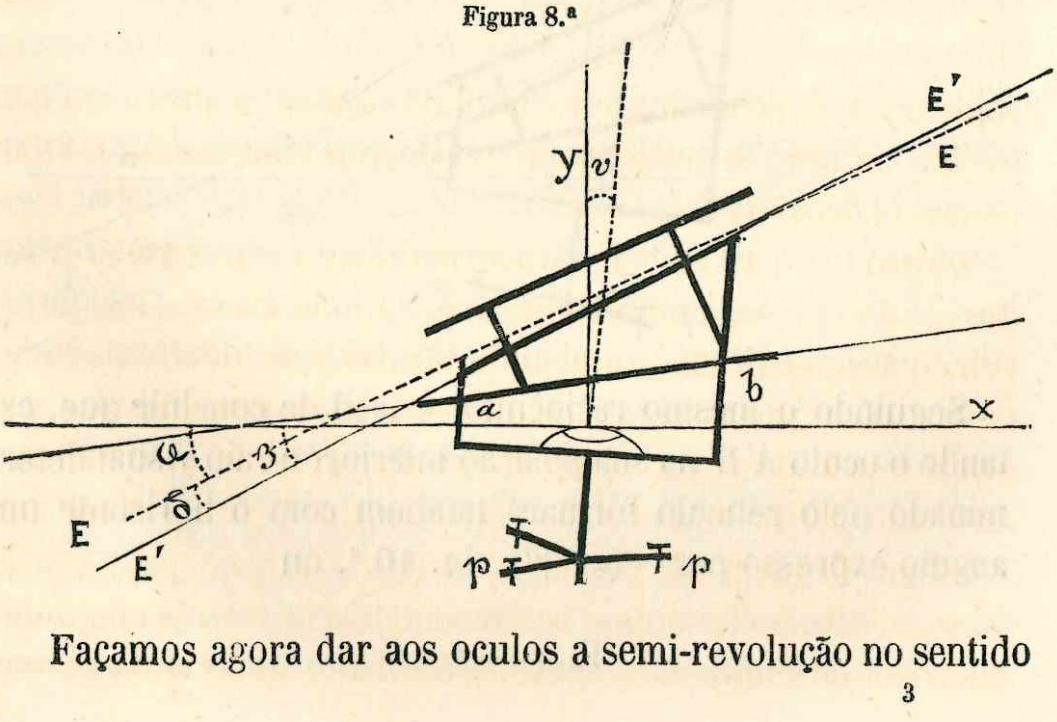


Figura 8.ª



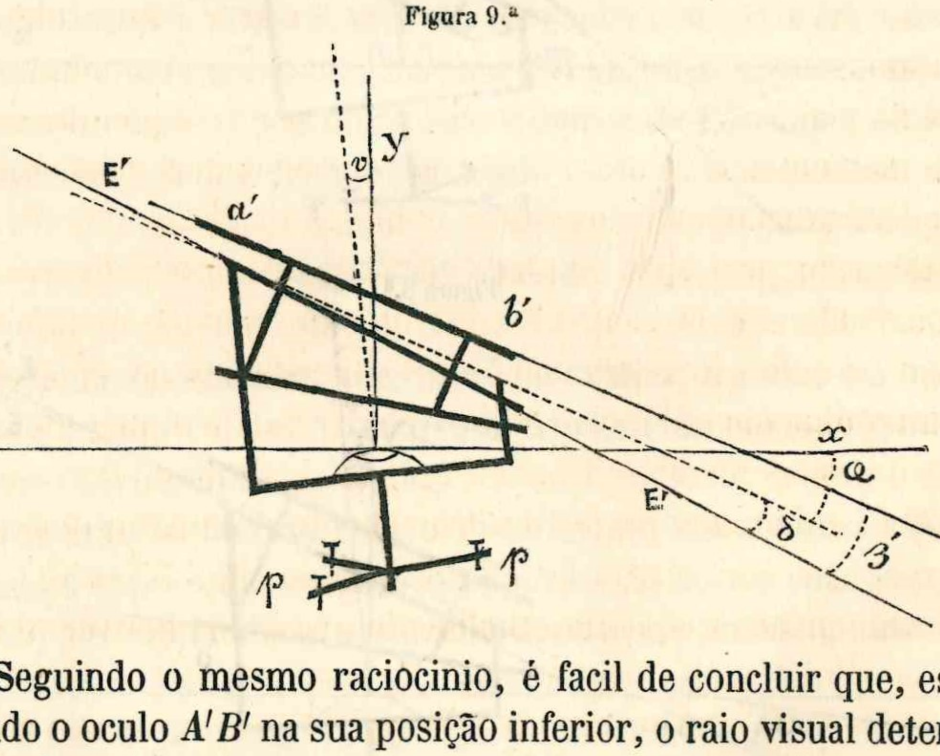
Façamos agora dar aos oculos a semi-revolução no sentido vertical, e supponhamos que o eixo *EE*, não estando bem torneado, tomou a posição *E'E'* que forma com a primeira um angulo δ; temos que o oculo *AB*, n'esta segunda posição, determina um raio visual, cuja inclinação com o horisonte será, fig. 8.ª

$$V_2 = (\alpha + \delta) - \beta$$

Girando depois meia circumferencia azimuthal com todo o systema, obriguemos a bolha do nivel a occupar outra vez o meio do tubo, servindo-nos para isto dos parafusos nivelantes *p;* o angulo *v* tornar-se-ha agora em $-v$, fig. 9.ª, α em $-\alpha$, δ em $-\delta$; e se chamarmos β' o angulo formado pelas direcções do eixo *E'E'* e do raio visual determinado pelo reticulo do oculo *A'B'* na sua posição superior, teremos que o angulo V_3 que este mesmo raio visual forma com o horisonte será expresso por $-(\alpha+\delta)+\beta'$, ou

$$V_3 = -(\alpha + \delta) + \beta'$$

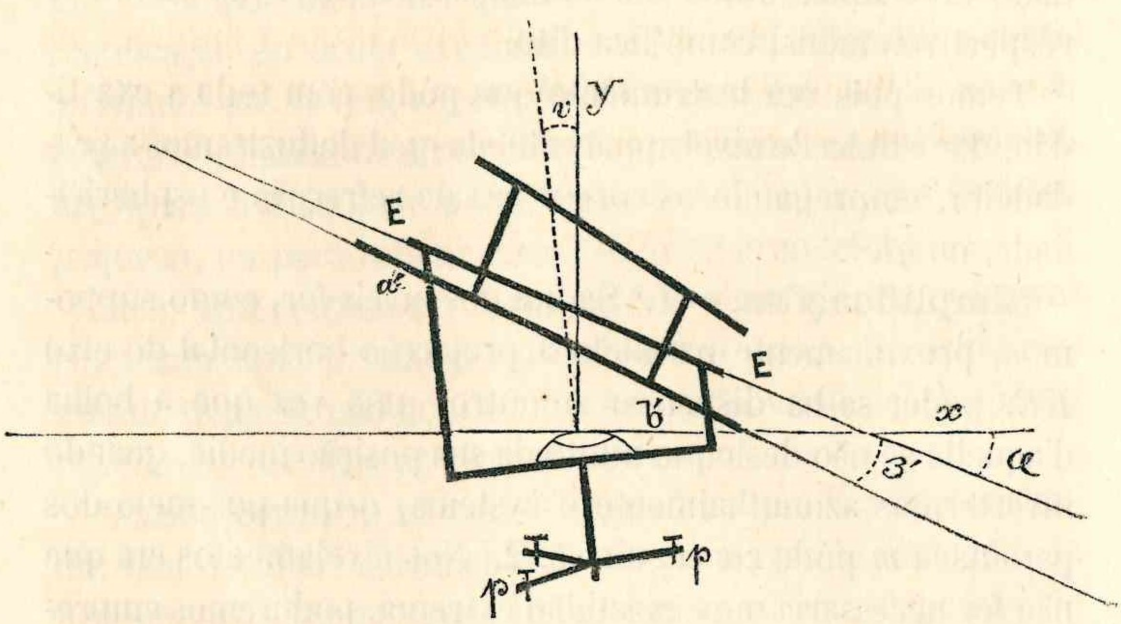
Figura 9.ª



Seguindo o mesmo raciocinio, é facil de concluir que, estando o oculo *A'B'* na sua posição inferior, o raio visual determinado pelo reticulo formará tambem com o horisonte um angulo expresso por $-(\alpha+\beta')$, fig. 10.ª, ou

$$V_4 = -\alpha - \beta'$$

Figura 10.ª



Portanto:

$$V_1+V_2+V_3+V_4=0;$$

o que prova que a posição media dos quatro raios visuaes é uma linha horisontal[1].

No decurso do raciocinio que nos levou a este resultado, suppozemos o nivel de bolha de ar com o seu eixo longitudinal no plano do raio visual determinado por qualquer dos oculos no momento da observação. Esta coincidencia quasi nunca se dará exactamente; porém podemos considerar, em vez do nivel, a sua projecção no plano vertical que passa pelo objecto observado e pelo centro do instrumento, porque, pondo em jogo os dois niveis cruzados que suppozemos no apparelho para complemento de exactidão, é claro que, qualquer que seja nos mesmos niveis o desvio do plano vertical alludido, sempre as differentes partes do instrumento occuparão posições symetricas em relação á linha de prumo (fig. 7.ª e 9.ª), se quando invertermos azimuthalmente o systema houver o cui-

[1] Na quarta pontaria, em que achamos $V_4=-\alpha-\beta'$, o eixo volta, ou deve voltar, da posição $E'E'$ para a primitiva EE; por isso desapparece δ. Estas considerações sobre a desigual fórma dos munhões talvez mostrem demasiado escrupulo da nossa parte, mesmo porque elles têem um pequeno diametro e estão bem justos nos montantes. No entretanto quizemos tocar no ponto para satisfazer os espiritos mais exigentes.

dado de chamar outra vez as bolhas dos niveis ao meio dos respectivos tubos, como fica dito.

Temos pois um instrumento que póde, com toda a exactidão, dar a linha de nivel apparente, da qual deduziremos a verdadeira, empregando as correcções de refracção e esphericidade, ou qK^2.

Simplificações. — 1.ª Se um dos niveis for, como suppomos, proximamente parallelo á projecção horisontal do eixo *EE*, poder-se-ha dispensar o outro, uma vez que a bolha d'aquelle se não desloque muito da sua posição media, quando invertermos azimuthalmente o systema, o que por meio dos parafusos *m* póde conseguir-se. 2.ª Nos nivelamentos em que não for necessaria uma exactidão extrema, poderemos empregar com muita confiança uma só pontaria e um só oculo; por exemplo, o oculo *AB*. Com effeito, pelo systema completo de observação já descripto, determinaremos na mira, ou em uma parede vertical, a altura em que passaria o prolongamento do eixo *EE* se fosse exactamente horisontal; ajuntando depois ou tirando a esta altura a distancia entre o dito eixo e o do oculo, conforme elle estiver na posição superior ou inferior, teremos a altura por onde deveria passar o raio visual para ser parallelo ao horisonte; ora com os parafusos *r* (fig. 5.ª) podemos reduzir o reticulo a satisfazer a esta condição, tomando ao mesmo tempo nota do estado e posição do nivel: portanto o systema das lunetas ou oculos invertidos tambem nos faculta o meio de simplificar a manobra do apparelho, empregando nas observações com muita confiança um unico oculo e uma só pontaria, pois em qualquer occasião podemos verificar facilmente a horisontalidade perfeita do raio visual que esse mesmo oculo determina.

Supponhamos que, para a determinação do perfil longitudinal de um lanço de estrada, tinhamos que fazer n'um dia quarenta estações com o nivel. Na primeira ajustavamos pela fórma indicada o oculo *AB*, que deve ser previamente marcado com um numero ou signal distincto, para evitar confusões. Depois iamos nivelando rapidamente com uma só pontaria, em vez de quatro, até chegarmos, por exemplo, á estação

15.ª; ahi por meio das quatro niveladas verificavamos se a rectificação do oculo existia ainda. No caso affirmativo continuavamos até ao fim, repetindo ahi o exame do oculo, no caso contrario refaziamos a rectificação e examinavamos o grau do erro para o distribuir pelas observações anteriores se fosse pequeno, ou para repetir estas, se fosse grande.

Se as observações não terminassem n'um dia, no outro verificariamos no principio do trabalho o estado do oculo, seguindo depois como no dia anterior. Estas verificações podem repetir-se conforme as circumstancias.

Vantagens do nivel.—Segundo o que fica demonstrado, tem o nosso instrumento de nivelar a grande vantagem de dar sempre uma rigorosa linha horisontal sem dependencia de rectificações ou de apurada construcção. N'este ponto julgâmo-lo superior aos até hoje conhecidos. A sua manobra não póde chamar-se vagarosa, pois ainda quando se empreguem as quatro niveladas, não é necessario desmontar o oculo nem o nivel de bolha de ar, que lhe andam sempre ligados. Se o compararmos com os de Egault, de Lenoir ou de Brunner, que são dos de melhor systema, e quizermos obter com estes toda a approximação de que são capazes, a manobra do nosso é mais rapida, termo medio, na relação de cinco para quatro.

Em nivelamentos que não sejam de precisão, podemos com simples pontarias, usando de um só oculo, avançar velozmente, tendo a vantagem de, sem mexer nos parafuzos rectificadores, nos certificarmos do grau da approximação obtida, quando assim for necessario. Alem d'isto a sua manobra é tão simples e facil em ambos os casos (mais no primeiro que no segundo), que uma pessoa qualquer, mesmo rude que seja, póde com pequeno tirocinio fazer um bom nivelamento.

Emquanto ao custo do apparelho, deveria em relação aos outros augmentar alguma cousa pelo facto de ter em vez de um oculo, dois; mas attendendo a que são dispensados alguns dos parafuzos rectificadores e desnecessarias certas condições de torneamento, deverá ficar ainda mais barato que os de Egault e de Brunner. É verdade que os que foram construidos no instituto industrial de Lisboa saíram por um preço bastante alto, mas o mesmo aconteceria com os niveis de outra especie, o que não é para admirar, pois os baixos preços só podem obter-se quando as encommendas são avultadas, e não para meia duzia de exemplares, que tantos foram construidos.

Cumpre-nos dar aqui um solemne testemunho de agradecimento ao sr. José Mauricio Vieira, director da officina dos instrumentos de precisão, pela maneira franca com que se encarregou da construcção do nosso nivel e pelo esmero empregado em o construir. Se o premio que obtivemos na grande exposição de París, em 1867, fosse dividido, era o sr. José Mauricio Vieira a quem tocaria uma boa parte.

Não terminaremos este capitulo sem darmos noticia das experiencias feitas com o nivel de que estamos tratando.

Em janeiro do corrente anno de 1870, fomos incumbidos pelo sr. general Filippe Folque de achar a differença de nivel entre o zero de uma escala de marés estabelecida na ponte do Barreiro (chamada do Mexilhoeiro) e um ponto ou superficie que, sem ser distante, offerecesse grande estabilidade (tinha isto por fim auxiliar a resolução de algumas questões de nivelamento geodesico). Chegados ao terreno em que devia executar-se o trabalho, em companhia do nosso amigo e camarada o sr. Augusto Cesar Carvalho da Silva, escolhemos para termo do nivelamento a pedra que serve de soleira da porta da igreja de Nossa Senhora do Rosario, na parte que fica exterior á umbreira, por ser ahi quasi isenta de contactos nocivos á inalterabilidade da sua posição; escolhemos depois a linha que seguiria o nivelamento, a partir da testa da ponte do Mexilhoeiro até á dita igreja. Feitas as necessarias investigações, assentámos: 1.º, que bastariam oito estações do instrumento, quatro na ida, e quatro na volta para verificação; 2.º, que estas estações deveriam ser afastadas, e a muito desiguaes distancias das miras, para que os erros, no caso de existirem, se podessem tornar bem distinctos; 3.º, que empregassemos todos os esforços para que a mira estivesse vertical, aproveitando os recursos da localidade; 4.º, que findo o nivelamento se comparasse a mira empregada com o *metro pa-*

drão, a fim de a corrigirmos de qualquer defeito de graduação.

O sr. Carvalho da Silva teve a benevolencia de querer incumbir-se de vigiar pela verticalidade da mira, condição importantissima para o bom exito do nivelamento, e tanto mais que a mira empregada era fallante, mas simples, isto é, sem os accessorios necessarios para comprovar a sua verticalidade.

Levámos até millimetros a approximação de cada uma das leituras, as quaes depois corrigimos dos erros de graduação, e que, por isso, no seguinte registo apparecem approximadas até aos decimillimetros.

Dia 20 de janeiro de 1870

Estações Nivel	Estações Mira	K	Leituras na mira	qK²	Leituras correctas Anteriores	Leituras correctas Posteriores	Esclarecimentos
N.º 1	(1)	m 223,2	m 1,4131 1,4983 1,3982 1,4540				A mira (1) apoiou-se o taboleiro da testada ponte junto á escala de marés. A mira 5 apoiou-se sobre a soleira da porta da igreja, perto da umbreira do norte.
			5,7636 1,4409	mm 3,2	m 1,4377		
	2	145,6	0,7978 0,8734 0,7993 0,8595				
			3,3300 0,8325	1,4		m 0,8311	
N.º 2	(2)	96,0	1,1080 1,1901 1,1030 1,1742				
			4,5753 1,1438	0,6	1,1432		
	3	66,1	1,7398 1,8189 1,7428 1,8099				
			7,1114 1,7779	0,3		1,7776	
N.º 3	(3)	254,6	1,9373 2,0249 1,9204 2,0080				
			7,8906 1,9727	4,4	1,9683		
	4	174,8	1,0210 1,1381 1,0600 1,1430				
			4,3621 1,0905	2,0		1,0885	
N.º 4	(4)	201,6	0,1510 0,2403 0,1362 0,2195				
			0,7470 0,1868	2,6	0,1842		
	5	153,2	1,1152 1,2008 1,1381 1,2130				
			4,6671 1,1668	1,5		1,1653	
					4,7334	4,8625	

Dia 22 de janeiro de 1870

Estações		K	Leituras na mira	qK²	Leituras correctas		Esclarecimentos
Nivel	Mira				Anteriores	Posteriores	
		m	m	mm	m	m	
N.º 1	(1)	153,0	1,1420				A mira (1) apoiou-se sobre a soleira da porta da igreja, perto da umbreira do norte. A mira 5 apoiou-se no taboleiro da testa da ponte junto á escala de marés.
			1,2137				
			1,1303				
			1,1986				
			4,6846				
			1,1712	1,5	1,1697		
	2	202,0	0,1672				
			0,2370				
			0,1470				
			0,2164				
			0,7676				
			0,1919	2,6		0,1893	
N.º 2	(2)	174,6	1,0622				
			1,1513				
			1,0401				
			1,1102				
			4,3638				
			1,0909	2,0	1,0889		
	3	254,8	1,9413				
			2,0180				
			1,9204				
			1,9945				
			7,8742				
			1,9686	4,4		1,9642	
N.º 3	(3)	29,6	1,5914				
			1,6615				
			1,5884				
			1,6555				
			6,4968				
			1,6242	0,0	1,6242		
	4	127,1	0,9706				
			1,0410				
			0,9506				
			1,0212				
			3,9834				
			0,9959	1,1		0,9948	
N.º 4	(4)	143,2	0,3587				
			0,4256				
			0,3405				
			0,4185				
			1,5433				
			0,3858	1,3	0,3845		
	5	226,0	0,9635				
			1,0405				
			0,9535				
			1,0196				
			3,9771				
			0,9943	3,3		0,9910	
					4,2673	4,1393	

Resulta do antecedente que a differença de nivel entre os pontos extremos é a seguinte, pelas duas observações de 20 e 22 de janeiro:

Ponte do Mexilhoeiro e igreja do Rosario (soleira da porta)...................	4,7334—4,8625 = — 0^m,1291
Igreja do Rosario (soleira da porta) e ponte do Mexilhoeiro......................	4,2673—4,1393 = + 0^m,1280
	— 0^m,0011

Sommar os dois resultados, equivale a suppor que o nivelamento percorreu o perimetro de um polygono e que veiu fechar no ponto de partida. A somma, não havendo erro visivel, seria igual a zero, porém dá — 0^m,0011, o que na extensão de 2500 metros (pois tanto é approximadamente o espaço percorrido) mostra um erro muito inferior aos achados nos nivelamentos de precisão mais bem dirigidos. Na Suissa, onde modernamente se têem executado n'este genero admiraveis trabalhos, o erro achado é, termo medio, de 1 millimetro por kilometro. Comtudo o resultado que obtivemos não podia dar ainda uma rigorosa medida da precisão do instrumento. Eram necessarios mais exemplos.

Em outras experiencias, feitas na companhia do nosso amigo e camarada o sr. Cesar Augusto de Campos Rodrigues, depois de fixarmos duas miras bem graduadas e perfeitamente verticaes, executámos as observações collocados a igual distancia d'ellas, determinando assim a differença de nivel independentemente de quaesquer erros systematicos do instrumento; em seguida, deslocando-nos e fazendo muito desiguaes as mesmas distancias, achámos o mesmo valor, tanto pelas observações do sr. Campos Rodrigues como pelas nossas, o que juntamente com os resultados obtidos no Barreiro veiu, já com algum peso, confirmar praticamente a theoria estabelecida, pela qual o instrumento estava isento de todos os erros systematicos.

No decurso das observações a que procedemos tivemos occasião de reconhecer mais uma vez quanto é necessario o perfeito verticalismo das miras ao bom exito dos nivelamentos. De todos os meios empregados para conseguir este fim nenhum nos satisfaz cabalmente, já pela sua insufficiencia, em certos casos, já pela complicação do systema, n'outros. Tivemos sobre isto uma idéa, que, posto não esteja ainda traduzida na pratica, deve dar bons resultados, segundo julgâmos. Esta idéa resume-se no seguinte:

Depois de bem graduada por um só lado a mira, que deve ser, como é costume, desempenada e de madeira bem secca, addiciona-se á face anterior (não graduada) um pequeno pendulo metallico com haste inflexivel e de 15 a 25 centimetros de comprimento. O diametro da haste deve ser de 5 millimetros proximamente. O pendulo será suspenso livremente a uma barra fixa á mira, figura 11.ª e 12.ª

Figura 11.ª

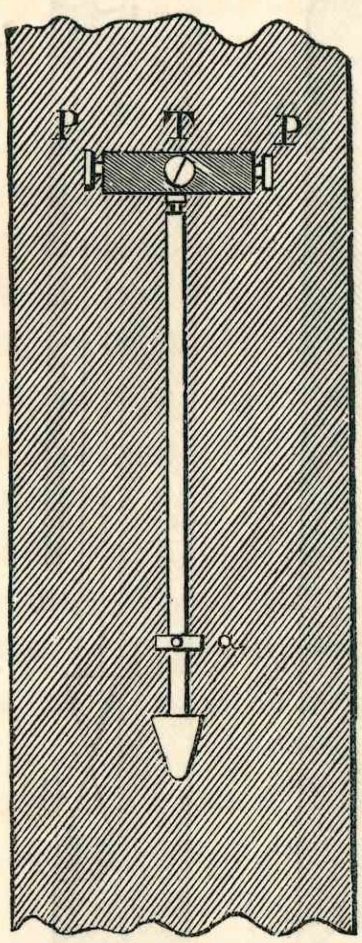
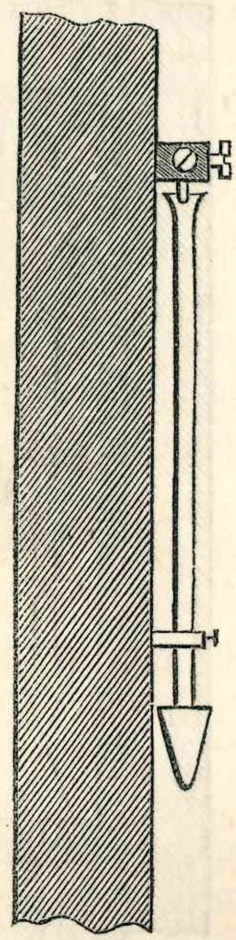


Figura 12.ª



Escala de $\frac{1}{4}$

Esta barra contém os parafusos *PP*, que, juntamente com o parafuso *T*, facultam mover nos dois sentidos orthogonaes o ponto de suspensão do pendulo, cuja haste passa pela argola *a* com folga de 3 a 4 millimetros.

É evidente que, se nos collocarmos em um logar abrigado do vento, podemos com um fio de prumo encostado á mira rectificar o pendulo annexo, por fórma que a sua haste posta em liberdade se não encoste a nenhum dos bordos da argola *a*, isto é, occupe o seu centro, quando a mira estiver vertical.

Depois de feita esta rectificação, o porta-mira não terá mais do que regular-se de modo que o pendulo, se não podér estar parado e livre, toque ao menos os differentes bordos do annel ou argola sem encostar-se de preferencia a um lado, o que nos prova que a mira faz pequenissimas oscillações em volta da vertical; d'onde resultarão, portanto, só erros inapreciaveis.

Figura 13.ª

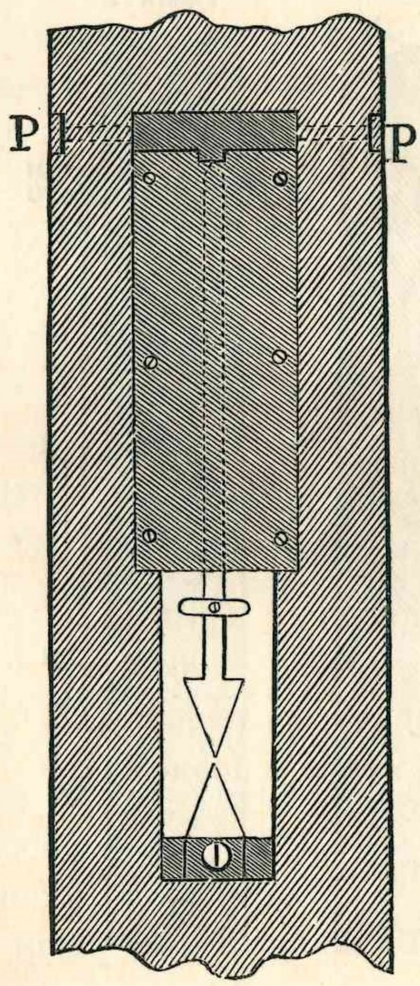


Figura 14.ª

Escala de $\frac{1}{4}$

O sr. Campos Rodrigues, a quem communicámos esta nossa idéa, apresentou logo uma importante modificação que consiste em acondicionar o systema do pendulo dentro da espessura da mesma mira, ficando só uma fresta por onde se podessem avaliar as coincidencias que indicam o verticalismo. Em vez do annel deve existir uma pequena peça conica *c*, que por meio do parafuso *r* póde deslocar-se no sentido perpendicular á face graduada da mira; por isso o pendulo para ser rectificado só necessita um movimento transversal a este, o que se consegue com um ou dois parafusos *P* identicos aos da figura antecedente. Por este modo, não só fica a mira muito desembaraçada e facil de ajustar-se a qualquer superficie plana, como tambem se resguarda mais do vento o systema annexo. Em todo o caso entendemos que o annel *a* deve ser conservado conjunctamente, porque haverá occasiões em que o ajustamento se observe melhor ahi do que na peça conica. As figu- 13.ª e 14.ª mostram claramente o systema.

A doutrina que fica exposta, tanto n'esta como na segunda parte, abrange, segundo julgâmos, quanto é necessario para a execução em topographia dos nivelamentos regulares. Parece-nos até que, empregando o nosso nivel e miras boas e bem collocadas, poderemos levar a effeito, sem difficuldade, grandes nivelamentos geometricos de precisão, que hoje prendem com justo motivo as attenções dos homens dedicados ao estudo da physica do globo.

Apresentando como typos dois unicos instrumentos, um para o nivelamento trigonometrico, outro para o geometrico, não quizemos por isso desprezar alguns dos outros que podem ser aproveitaveis e até mui convenientes em certos casos, como, por exemplo, nos reconhecimentos ou levantamentos passageiros. Mas todas as vezes que tivermos em vista uma operação regular e systematica, deveremos empregar algum dos dois typos propostos, sob pena, ou de tornarmos o trabalho complicado e moroso, ou de incorrermos provavelmente em erros consideraveis.

É em todo o caso conveniente que vão desapparecendo do estudo pratico e positivo grande parte d'esses instrumentos, que, á maneira do *velho circulo repetidor*, já representaram o seu papel na vasta arena do progresso, e que hoje para pouco podem servir, a não ser para a historia dos melhoramentos successivamente introduzidos na topographia e geodesia.

II

COMPENSAÇÃO DOS ERROS DE UM NIVELAMENTO

SEGUNDO O METHODO DOS MENORES QUADRADOS [1]

Quando se tomam differenças de nivel sobre maior numero de lados que os indispensaveis para dar a conhecer a altura relativa de todos os vertices de um triangulo, polygono ou rede trigonometrica, deverá evitar-se que appareçam diversos valores correspondentes a um mesmo ponto, estabelecendo para isso equações de condição que devem ficar rigorosamente satisfeitas. Estas condições são expressas em funcção dos *erros*, isto é, das differenças que existem entre as determinações que são indispensaveis e as que são superfluas: podem, por consequencia, ser tratadas pelo methodo dos *menores quadrados*.

A primeira cousa a fazer é procurar uma regra que nos dê a conhecer o numero de equações de condição, para que não introduzamos no calculo, nem de mais nem de menos.

Em um triangulo ABC podemos observar *tres* differenças de nivel; a saber: entre A e B, entre A e C, e entre B e C. Tomemos para ponto de partida o vertice A (cuja cota faremos igual a zero, se não for conhecida); as duas primeiras differenças de nivel determinarão as cotas dos pontos B e C; a terceira fornece pois uma equação de condição. Assim

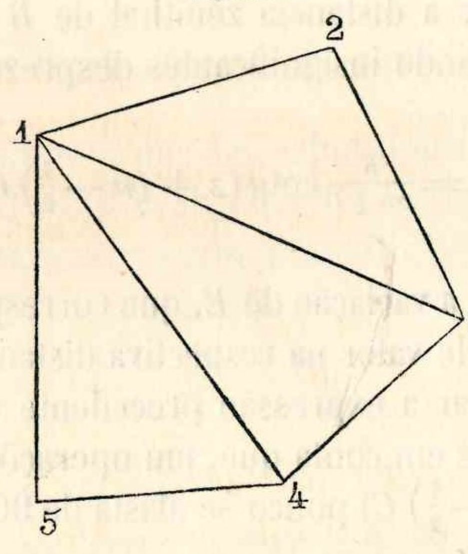
[1] A doutrina que, sob este titulo, vae ser exposta, foi extrahida das memorias do sr. Gauss, da *Kustenvermessung* do sr. Baeyer, e sobretudo do calculo das probabilidades e theoria dos erros do sr. Liagre, o qual compendiou n'um interessante volume os admiraveis modelos theoricos e praticos, que, a tal respeito, têem sido produzidos pelos illustres geometras allemães.

«quando em um triangulo se observaram as differenças de nivel entre os vertices tomados dois a dois, existe uma equação de condição relativa ao nivelamento». Para forma-la, bastará considerar que se partissemos de um dos vertices, correndo todo o perimetro até voltar ao ponto de partida, tanto teriamos baixado como subido, e por isso a somma das differenças de nivel, tendo em conta os signaes, será necessariamente igual a zero. Sejam h_1, h_2, h_3, as cotas dos tres vertices, teremos

$$(h_1-h_2)+(h_2-h_3)+(h_3-h_1)=0.$$

Considerações identicas se applicam ao perimetro de qualquer polygono, e todas as determinações de suas alturas se ajustam á indicada regra sempre que esta se cumpra nos diversos triangulos de que o polygono consta, pelo que será

Figura 15.ª



sufficiente formar as equações de condição relativas aos ditos triangulos. Tomemos para exemplo o pentagono 1, 2, 3, 4, 5, (figura 15.ª) e supponhamos que

$$(h_1-h_2)+(h_2-h_3)+(h_3-h_1)=0$$

$$(h_1-h_3)+(h_3-h_4)+(h_4-h_1)=0$$

$$(h_1-h_4)+(h_4-h_5)+(h_5-h_1)=0.$$

Sommando, temos

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_4) + (h_4 - h_5) + (h_5 - h_1) = 0$$

Esta consideração facilita muito a formação das equações de condição, porque resulta d'ahi, que em toda a figura composta de triangulos basta procurar as equações de condição n'esses triangulos. Portanto, em qualquer triangulação, o numero de equações é igual ao numero de differenças de nivel que, a partir de um ponto inicial, é estrictamente necessario para a determinação dos outros pontos. Se n designar o numero de vertices, são necessarias $(n-1)$ differenças de nivel, e se realmente observâmos m, teremos $x = m - n + 1$ equações de condição.

Para o triangulo, $m = 3$, $n = 3$: logo $x = 1$.

Para o quadrilatero com duas diagonaes, $m = 6$, $n = 4$: logo $x = 3$, etc.

Representando por E a differença de nivel entre dois pontos A e B, por z a distancia zenithal de B observada de A, teremos, effectuando insignificantes desprezos (equação 9 da 1.ª parte),

$$E = \frac{K}{\cos \frac{1}{2} C} \operatorname{cotg}\left(z + \left(n - \frac{1}{2}\right) C\right)$$

Para conhecer a variação de E, que corresponde a uma pequena mudança de valor na respectiva distancia zenithal, podemos differenciar a expressão precedente em ordem a E e z; e se tomarmos em conta que, em operações geodesicas, o angulo $\left(z + \left(n - \frac{1}{2}\right) C\right)$ pouco se afasta de 90°; teremos, sem erro sensivel,

$$dE = -Kdz.$$

dz será positivo ou negativo, segundo z exceder ou não 90°, e em um e outro caso, de signal contrario ao de dE.

Se dz exprime segundos, será necessario dividir Kdz por r'', e então dE virá expresso na mesma unidade que a distancia K. Teremos pois definitivamente

$$dE = -\frac{Kdz}{r''};$$

r'' é o numero de segundos comprehendidos no arco igual ao raio ou $206264'',8$.

Posto isto, designem:

$E_1, E_2, E_3 \ldots$ as differenças de nivel não compensadas dos vertices de um triangulo ou polygono;

$K_1, K_2, K_3 \ldots$ os comprimentos dos seus lados;

$(1), (2), (3) \ldots$ as correcções que devem receber as distancias zenithaes para que fiquem compensadas as ditas differenças de nivel; a equação de condição será

$$0 = -E_1 + E_2 + E_3 \ldots + \frac{K_1}{r''}(1) - \frac{K_2}{r''}(2) - \frac{K_3}{r''}(3) \ldots;$$

e fazendo:

$$-E_1 + E_2 + E_3 \ldots = \mathfrak{A}$$

$$+\frac{K_1}{r''} = a\,; \; -\frac{K_2}{r''} = a'\,; \; -\frac{K_3}{r''} = a''\,; \text{ etc.}$$

teremos

$$0 = \mathfrak{A} + a(1) + a'(2) + a''(3) + \ldots$$

Para generalisar a questão admittimos que o numero das distancias zenithaes observadas não é o mesmo nas differentes estações: será necessario, pois, attribuir aos resultados os pesos $p_1, p_2, p_3 \ldots$ suppondo-os proporcionaes ao numero de observações; e trataremos em seguida de reduzir a um *minimo* a seguinte funcção (em que $2S$ representa a somma dos quadrados dos erros):

$$2S = p_1(1)^2 + p_2(2)^2 + p_3(3)^3 + \ldots \qquad (a)$$

tendo em conta as condições seguintes:

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 = \mathfrak{A} + a(1) + a'(2) + a''(3) + \ldots \\ u' &= 0 = \mathfrak{B} + b(1) + b'(2) + b''(3) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

etc., etc.

Se multiplicarmos respectivamente estas equações pelos factores indeterminados I, II, ...; se as differenciarmos em relação a (1), (2), (3)... e ajuntarmos os coefficientes differenciaes (que, pela condição do minimo, devem ser iguaes a zero) aos analogos tirados de (a), teremos

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{dS}{d(1)}+\frac{du}{d(1)}\mathrm{I}+\frac{du'}{d(1)}\mathrm{II}+\ldots\\ 0&=\frac{dS}{d(2)}+\frac{du}{d(2)}\mathrm{I}+\frac{du'}{d(2)}\mathrm{II}+\ldots\\ 0&=\frac{dS}{d(3)}+\frac{du}{d(3)}\mathrm{I}+\frac{du'}{d(3)}\mathrm{II}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

etc., etc.

Mas pela equação (a),

$$\frac{dS}{d(1)}=p_1(1);\frac{dS}{d(2)}=p_2(2);\frac{dS}{d(3)}=p_3(3);\text{etc.}$$

Alem d'isto, temos:

$$\frac{du}{d(1)}=a;\frac{du'}{d(1)}=b;\text{etc.}\ldots\frac{du}{d(2)}=a';\frac{du'}{d(2)}=b';\text{etc.}$$

Estes valores substituidos nas equações precedentes (c), transformam-nas em

$$\begin{aligned} 0&=p_1(1)+a\ \mathrm{I}+b\ \mathrm{II}+\ldots\\ 0&=p_2(2)+a'\ \mathrm{I}+b'\ \mathrm{II}+\ldots\\ 0&=p_3(3)+a''\mathrm{I}+b''\mathrm{II}+\ldots \end{aligned}$$

etc, etc..

e temos

$$\left.\begin{aligned} (1)&=-\frac{1}{p_1}\{a\ \mathrm{I}+b\ \mathrm{II}+\ldots\}\\ (2)&=-\frac{1}{p_2}\{a'\ \mathrm{I}+b'\ \mathrm{II}+\ldots\}\\ (3)&=-\frac{1}{p_3}\{a''\mathrm{I}+b''\mathrm{II}+\ldots\} \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

etc., etc.

Prescindindo do signal dos segundos membros d'estas expressões, e substituindo-as em (b), resultam as equações finaes:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{A} + \left[\frac{a\,a}{p}\right] I + \left[\frac{a\,b}{p}\right] II + \ldots \\ 0 &= \mathfrak{B} + \left[\frac{a\,b}{p}\right] I + \left[\frac{b\,b}{p}\right] II + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

etc., etc.

em que

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = \frac{a\,a}{p_1} + \frac{a'\,a'}{p_2} + \frac{a''\,a''}{p_3} + \ldots, \text{ etc.}$$

A resolução das equações (e) dará os valores dos coefficientes correlativos I, II, III... que introduzidos nas (d) proporcionarão as correcções (1), (2), (3)... as quaes exprimem em segundos as mudanças que devem operar-se nas distancias zenithaes observadas para que o nivelamento trigonometrico seja exactamente compensado. As variações de nivel correspondentes, que designaremos por Δ_1, Δ_2, Δ_3... obter-se-hão respectivamente pelas formulas:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{K_1}{r''}(1) \\ \Delta_2 &= \frac{K_2}{r''}(2) \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

etc.

Exemplos:

Entrando em calculo com as observações feitas por meio de um bom universal de Troughton, achâmos que as differenças de nivel entre os vertices do triangulo de 1.ª ordem, Observatorio do castello de S. Jorge, Serves, Palmella, eram:

$$\begin{array}{lr} \text{Observatorio e Serves} \ldots & +236^{\mathrm{m}},924 - \frac{K_1}{r''}(1) \\ \text{Serves e Palmella} \ldots\ldots & -149\ ,168 + \frac{K_2}{r''}(2) \\ \text{Palmella e Observatorio} .. & -\ 88\ ,382 + \frac{K_3}{r''}(3) \\ \hline \end{array}$$

$$0 = -0^{\mathrm{m}},626 - \frac{K_1}{r''}(1) + \frac{K_2}{r''}(2) + \frac{K_3}{r''}(3)$$

Temos tambem

$$K_1 = 20375^m,72 \,;\, \mathrm{Log}\, K_1 = 4,3091103 \,;$$

$$K_2 = 40019,59 \,;\, \mathrm{Log}\, K_2 = 4,6022726 \,;$$

$$K_3 = 26062,59 \,;\, \mathrm{Log}\, K_3 = 4,4160176 \,;$$

e sendo, como é sabido, $\log r'' = 5,3144251$, achâmos:

$$\mathrm{Log}\, a = \bar{2},9946852 \,;\, \mathrm{Log}\, a' = \bar{1},2878475 \,;$$

$$\mathrm{Log}\, a'' = \bar{1},1015925$$

$$\mathrm{Log}\,(aa) = \bar{3},9893704 \,;\, \mathrm{Log}\,(a'a') = \bar{2},5756950 \,;$$

$$\mathrm{Log}\,(a''\, a'') = \bar{2},2031850.$$

Ora como em cada vertice se observou igual numero de distancias zenithaes (segundo consta dos respectivos registros, foram 15) podemos fazer, para simplicidade, $p = 1$, e teremos

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = 0,0633677 \,;\, \mathrm{Log}\left[\frac{a\,a}{p}\right] = \bar{2},8018679.$$

Nas equações (e) temos, para o nosso caso, $b = 0$ e $\mathfrak{A} = -\, 0^m,626$; portanto:

$$\mathrm{Log}\, I = 0,9947064 \,;\, I = +\, 9,878850.$$

As equações (d) dão

$$(1) = -\, 0'',976 \,;\, (2) = -\, 1'',917 \,;\, (3) = -\, 1'',248 \,;$$

e finalmente, por (f), resulta:

$$\Delta_1 = 0^m,0964 \,;\, \Delta_2 = 0^m,3719 \,;\, \Delta_3 = 0^m,1577.$$

Temos, pois, em virtude da compensação, e attendendo aos signaes das differenças de nivel:

Observatorio e Serves	= +	236,924 ᵐ	+ 0,096	= +	237,020 ᵐ
Serves e Palmella	= −	149,168	+ 0,372	= −	148,796
Palmella e observatorio	= −	88,382	+ 0,158	= −	88,224
					0,000

Para maior numero de triangulos o processo é o mesmo, e só acresce o trabalho do calculo numerico, o qual augmenta rapidamente por causa da determinação dos factores I, II, III, IV, etc., que é obtida por meio de uma eliminação longa e penosa. (Veja-se o capitulo X da *Kustenvermessung* do sr. Baeyer.)

Podendo o nivelamento geometrico ser considerado como um caso particular do trigonometrico, são-lhe applicaveis os antecedentes principios todas as vezes que se der alguma equação de condição, o que terá logar sempre que o nivelamento percorra o perimetro de um polygono, ou se apoie em pontos cujas differenças de nivel sejam anteriormente conhecidas.

Para que os differentes nivelamentos sejam comparaveis entre si por meio de uma medida commum de precisão, é necessario conhecer os seus erros provaveis.

Sejam:

δ_1, δ_2, δ_3... as differenças que existem entre cada valor simples, dado pela observação, e a média d'esses valores;

n o numero de observações feitas para determinar cada uma das differenças de nivel parciaes;

e_1, e_2, e_3... os erros provaveis relativos a cada uma das ditas observações;

E_1, E_2, E_3... os erros provaveis das medias.

Teremos:

$$e_1 = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \cdots}{n-1}}, \text{ etc.}$$

$$E_1 = \frac{e_1}{\sqrt{n}},\ E_2 = \frac{e_2}{\sqrt{n}}, \text{ etc.}$$

e se chamarmos ε o erro provavel do resultado de todo o nivelamento, será

$$\varepsilon = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \cdots}$$

(Veja-se o *Calculo das probabilidades* do sr. Liagre.)

III

NOTICIA ÁCERCA DOS PRINCIPAES NIVELAMENTOS EXECUTADOS EM DIVERSOS PAIZES

Não queremos dar por terminado este nosso humilde escripto sem que percorramos, em breve revista, alguns dos principaes nivelamentos e os methodos seguidos na execução d'elles. Fallaremos sómente dos nivelamentos geodesicos que se realisaram em linhas especiaes, empregando todos os recursos da sciencia, e não dos que se têem feito em toda a extensão do territorio de um estado, por methodos mais ou menos expeditos.

O sr. D. Carlos Ibañez, na sua excellente obra intitulada *Estudios sobre nivelacion geodesica*, dividiu em tres os methodos applicaveis á determinação geodesica das differenças de nivel com sufficiente precisão, logoque se conheça a grandeza do arco terrestre comprehendido entre dois pontos visiveis entre si. Estes methodos são:

1.º Observando simultaneamente em cada ponto a distancia zenithal do outro, reiterando convenientemente a operação, e combinando depois cada par de observações simultaneas; podendo-se prescindir assim da refracção, suppondo que a trajectoria luminosa é symetrica em relação á recta que une os dois pontos; hypothese esta que introduzirá no resultado um erro mui pequeno, quando a differença de nivel não for consideravel.

2.º Escolhendo uma estação situada a igual distancia dos dois pontos, e determinando a differença de nivel para cada um d'elles por meio de suas distancias zenithaes, observadas com o menor intervallo possivel e consideradas portanto como simultaneas. A hypothese que se estabelece n'este caso é, considerar que as duas tangentes ás trajectorias luminosas, na estação intermedia, formam angulos iguaes com as rectas que a unem aos dois pontos extremos, o que suppõe symetria no terreno em ambas as direcções.

3.º Observando em um dos pontos a distancia zenithal do outro, e simultaneamente em ambos as pressões atmosphericas e as temperaturas do ar; executando iguaes observações reciprocas, bem que em epocha differente, no ponto que serviu de mira.

Nós, respeitando sempre muito o elevado talento do sr. Ibañez, porém conhecendo que o 3.º methodo ha de ser muitas vezes insufficiente nos terrenos mui accidentados da Peninsula, o que em parte já está provado pelas observações feitas entre Madrid e Ocaña, acrescentaremos o seguinte:

4.º Observando distancias zenithaes reciprocas e não simultaneas, e tomando, juntamente, nota das indicações do barometro e thermometro no ponto de estação, para que o effeito do poder refrangente da atmosphera possa ser calculado pelas formulas do sr. Struve ou por outras mais adequadas, se existirem.

Apresentando como sufficientemente exacto este methodo, não deixâmos de conhecer que tem alguns defeitos; porém se attendermos a que as influencias de refracção são *maximas* junto á estação do instrumento, e *minimas*, ou nullas, junto ao ponto observado; se attendermos a que as observações reciprocas e simultaneas sem o calculo da refracção pouco valor têem havendo nos pontos grande differença de nivel, como acontece quasi sempre entre nós; se attendermos finalmente a que pelo 4.º methodo é mettido em conta sufficientemente o estado da atmosphera nos pontos em que ella mais influe nas observações, não julgâmos fóra de proposito que os methodos citados sejam postos na seguinte ordem para os usos da Peninsula:

1.º Estações intermedias, convenientemente escolhidas.

2.º Observações reciprocas e simultaneas, porém tomando em ambas as indicações do barometro e thermometro para ser calculado o effeito da refracção.

3.º Observações reciprocas e não simultaneas com o calculo da refracção, usando dos dados meteorologicos obtidos na estação do instrumento.

Não citâmos aqui o outro methodo indicado pelo sr. D. Carlos Ibañes, porque o julgâmos deficiente para os nivelamentos de primeira ordem da Peninsula, como é declarado pelo mesmo illustre geometra no fim da sua excellente memoria[1].

O exemplo mais brilhante do 1.º methodo é a determinação da differença de nivel entre o mar Caspio e o mar Negro, empreza intentada por iniciativa da academia das sciencias de S. Petersburgo.

Conforme o plano determinado pela academia, o nivelamento devia ser executado sobre uma linha que, partindo de Kalganik, nas praias do mar de Azof, fosse terminar em Tchernoï-Rynok, junto ao mar Caspio. A linha escolhida reunia todas as condições essenciaes para o exito da expedição, e tinha, alem d'isso, a vantagem importante de passar, na parte media, por pontos d'onde se descobriam as montanhas do Caucaso, e, por isso, de offerecer a possibilidade de que estas alturas fossem determinadas.

Aindaque o methodo empregado não exigia mais que um instrumento e um observador, foram tres os observadores, a saber, os srs. Fuss, Sawitsch e Sabler, e os instrumentos eram:

1) Um instrumento de passagens portatil; o oculo de 18 polegadas de distancia focal;
2) Um grande universal de Ertel; oculo de 18 polegadas;
3) Dois theodolitos; oculos de 13 polegadas;
4) Um pequeno universal; oculo de 10 polegadas;
5) Tres chronometros de caixa;
6) Escala de ferro, compasso, etc.;
7) Dois oculos;
8) Barometros, thermometros, etc.;
9) Uma collecção de niveis;
10) Apparelhos auxiliares e de reserva.

Os instrumentos 2, 3, 4, empregados na medida das distancias zenithaes, eram munidos de excellentes niveis exe-

[1] Este methodo, apresentado por Biot, funda-se na equação differencial da trajectoria luminosa estabelecida por Laplace na sua *Mechanica celeste*.

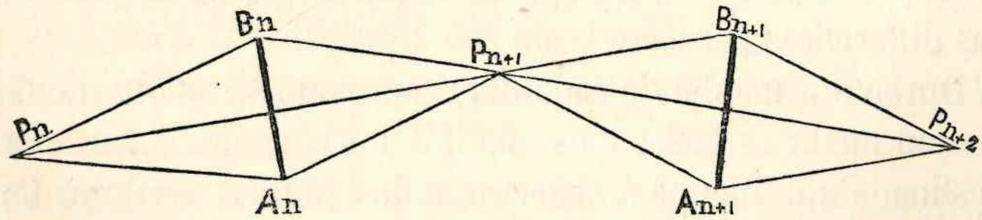
cutados em Hamburgo pelos srs. Repsold. As operações no campo duraram 209 dias.

Pela collocação successiva de 124 signaes, $P_1\ P_2 \ldots P_{124}$, postos de preferencia sobre os cabeços, e munidos de pontos de mira de côr branca sobre fundo negro, elevados 16 pés inglezes acima do solo, e visiveis dos dois lados, foi transformada a linha de operações em um polygono aberto, do qual a somma dos lados era de 824 verstes (878 kilometros proximamente).

Os signaes, tanto quanto a natureza do terreno o permittia, foram collocados a iguaes distancias entre si, d'onde resultou que o valor medio d'um lado, isto é, da distancia de dois signaes vizinhos, era de 23392 pés inglezes = 6,68 verstes = 7130 metros proximamente.

Com o auxilio de um apparelho simples, mas que dava a requerida exactidão, mediu-se uma pequena base $A_n\ B_n$ a meio caminho e entre cada par de signaes vizinhos P_n e P_{n+1}. Foram pois medidas 123 bases de um comprimento medio de 1172 pés. Formemos agora os dois triangulos $A_n\ B_n\ P_n$ e $A_n\ B_n\ P_{n+1}$, que juntos constituem um rhombo oblongo, (figura 16.ª), e não teremos mais que medir os angulos para achar o valor, quer dos lados, quer da diagonal do rhombo, ou da distancia dos dois signaes P_n e P_{n+1}. Assim por diante.

Figura 16.ª



Os angulos oppostos á base, tendo um valor medio de 5° 44′, foram medidos com o grande instrumento de Ertel, e com exactidão de 1 segundo proximamente em cada angulo. O mesmo instrumento foi empregado na medição dos angulos entre as diagonaes contiguas. Para os formados nas duas extremidades das bases empregou-se o pequeno universal, que os dava com approximação de 6 segundos. A somma dos angulos nos differentes triangulos e as observações reiteradas garantiam a operação. Por este modo obteve-se uma avaliação precisa de cada distancia isolada P_n e P_{n+1} e do encadeamento intimo dos 123 lados do polygono entre P_1 e P_{124}. Uma tal operação, levada a effeito com muito cuidado, offerece muita precisão, sendo isenta, por causa do grande numero de bases medidas, da accumulação dos erros nas distancias, que produz o encadeamento successivo dos triangulos nas operações ordinarias. No caso presente só havia a temer a accumulação de erros nas direcções. Para obviar a este inconveniente foi determinado pela observação da polar, principalmente, o azimuth absoluto do signal vizinho, não sómente em P_1 e P_{124}, mas em sete pontos intermediarios. Determinaram-se ao mesmo tempo as latitudes. Com estas observações foram combinadas as direcções azimuthaes dos mais elevados cumes do Caucaso.

Passemos agora ás determinações no sentido vertical. O problema a resolver consistia em avaliar as differenças successivas da altura entre as 124 miras do polygono por meio dos angulos verticaes observados, suppondo dadas as distancias horisontaes. Estas differenças reunidas deviam fornecer o nivel relativo das duas miras P_1 e P_{124}, e finalmente a differença de nivel dos dois mares, por isso que a elevação linear d'estas miras sobre os niveis medios respectivos dos dois mares era conhecida por medições directas. É claro que para o bom exito das operações tornava-se indispensavel um alto grau de precisão nas differenças parciaes.

Durante a manhã de cada dia occuparam-se os observadores em medir as bases e os angulos horisontaes. A tarde era destinada unicamente á observação dos angulos verticaes terrestres, porque é o tempo em que as imagens estão mais tranquillas, e por isso o mais proprio para as observações. Estas eram feitas em cada dia simultaneamente sobre tres pontos consecutivos, pela ordem ou disposição seguinte:

O sr. Fuss, F, observava em B_{n+1} as miras P_{n+1} e P_{n+2} com o theodolito I;

O sr. Sabler, Σ, observava em P_{n+1} as miras P_n B_n B_{n+1} P_{n+2} com o grande universal;

O sr. Sawitsch, S, observava em B_n as miras P_n e P_{n+1} com o theodolito II.

No dia seguinte F observava em B_{n+2}, Σ em P_{n+2}, S em B_{n+1}.

Vê-se facilmente que, empregando o systema descripto, se eliminam os erros provenientes da flexão dos oculos e da reducção das observações aos pontos de mira, erros difficil de determinar nos outros methodos. Alem d'isto o effeito da refracção tambem fica, senão inteiramente, ao menos quasi eliminado, porque devemos suppor que ella se desenvolve com muita symetria em torno de um mesmo ponto, se este for escolhido convenientemente.

Pelo que fica exposto, comprehende-se que o processo empregado dá cinco series de observações feitas de pontos medios em toda a linha do nivelamento, e inteiramente independentes entre si; d'onde resultam para a differença de nivel dos dois mares cinco valores tambem independentes. Estas series são:

1) A serie F, deduzida das observações das miras P_n e P_{n+1} que fez o sr. Fuss nas 123 estações B_n das bases;

2) A serie S, deduzida das observações do sr. Sawitsch, feitas nas mesmas 123 estações B_n, mas atrazadas de um dia;

3) A serie Σ', deduzida das observações das miras estabelecidas nas extremidades das bases B_n e B_{n+1}, e feitas pelo sr. Sabler nas 123 estações P_n;

4) A serie Σ'', deduzida das observações das miras P_{n-1} e P_{n+1}, feitas pelo sr. Sabler nas 61 estações P_n, indicando n um numero par;

5) A serie Σ''', deduzida das observaçoes das miras P_n e P_{n+2}, feitas pelo sr. Sabler nas estações impares P_{n+1}. (Veja-se para maior clareza a excellente descripção do sr. W. Struve, d'onde tirâmos esta noticia.)

Os cinco nivelamentos independentes deram para differença de nivel, δN, entre o mar Negro e o mar Caspio, os valores seguintes:

A serie F deu $\delta N = -87,72$ pés inglezes, com $\varepsilon = \pm 2,21$
A serie S deu $-87,68$ pés inglezes, com $\pm 2,21$
A serie Σ' deu $-84,16$ pés inglezes, com $\pm 1,89$
A serie Σ'' deu $-80,05$ pés inglezes, com $\pm 3,69$
A serie Σ''' deu $-87,68$ pés inglezes, com $\pm 3,35$

O sr. Struve, entrando no calculo com todos os dados, em ordem a obter um resultado unico, achou definitivamente

$$\delta N = -85,45 \text{ pés inglezes} = -26,045 \text{ metros.}$$

$$\varepsilon = \pm 0^{m},252$$

Chegar de um extremo ao outro de uma linha de nivelamento de 800 kilometros com um erro provavel menor de 3 decimetros, é obter, diz o sr. Ibañes, um resultado surprehendente, que difficilmente será excedido em outras operações, seja qualquer o systema que se empregue.

Para exemplo dos nivelamentos feitos pelo 2.º methodo, (observações reciprocas e simultaneas), mas sem o calculo das refracções, temos:

1.º O executado entre París e Brest pelos srs. Bonne, Epailly e Béraud, na extensão de 400 kilometros. A media dos comprimentos dos lados não chegou a 29000 metros, sendo o maior de 42000; a differença de nivel mais consideravel foi de 174 metros, e a media de todas não chegou a 80 metros. As observações foram feitas de dia e de noite. Nas observações de dia serviram de signaes, segundo as circumstancias, ou as cupulas dos campanarios, ou miras de madeira collocadas nas torres, ou pyramides de alvenaria com mira no vertice. De noite empregaram-se luzes com reverbero.

Os instrumentos foram dois circulos repetidores perfeitamente comparados, e tendo nonios de 20 segundos centesimaes.

Cada valor de uma distancia zenithal era o resultado de uma serie de 20 repetições, e o numero de series variou entre 1 e 7. O erro provavel do nivelamento foi

$$\varepsilon = \pm 1^m,362$$

Este resultado, diz ainda o sr. Ibañes, é mui satisfactorio em um nivelamento de tal extensão, se attendermos aos defeitos inherentes aos signaes e instrumentos empregados, e tambem a que a simultaneidade das observações não foi tão perfeita como era para desejar.

2.º O nivelamento que os srs. Baeyer e Bertram executaram entre Berlim e o porto de Swinemünde, na extensão de 200 kilometros.

A media dos lados, que eram 12, não passou de 17000 metros, indo o maior pouco alem de 30000 metros. A maxima differença de nivel era de 160 metros, e a media geral de 80 metros.

As distancias zenithaes observaram-se com dois theodolitos, um de Ertel, outro de Gambey. Os signaes empregados foram para as grandes distancias os heliotropos de Gauss, e para as pequenas a mira quadrada de meio metro de lado, pintada de branco e com uma faxa negra horisontal de largura igual á terça parte do lado. Os effeitos da flexão foram tomados em conta, e o numero das distancias zenithaes simples, medidas em cada um dos vertices, variou entre 30 e 44. O erro provavel foi

$$\varepsilon = \pm 0^m,726$$

Resultado tambem muito satisfactorio.

Falta-nos um exemplo do 3:º methodo. Quizeramos aqui citar o nivelamento que foi executado pelos nossos engenheiros geographos entre Lisboa e os signaes geodesicos *Rego* e *Contenda*, proximos de Badajoz; mas, não estando ainda ultimados os calculos, mal o podemos fazer, sendo provavel que uma penna mais habil e de pessoa muito mais auctorisada o faça dentro de pouco tempo. No entretanto damos como amostra o exemplo já citado e respectivo ao triangulo *Observatorio-Serves-Palmella*, cujo perimetro é de 86 kilometros proximamente.

O instrumento empregado foi um universal de Troughton, em que se fazem leituras directas de $1''$ por meio de dois microscopios micrometricos. No azimuthal tem outros dois similhantes. Cada divisão do nivel corresponde a $0'',760$. O numero de distancias zenithaes foi igual a 15 para todos os pontos, e cada uma foi o resultado de duas pontarias e oito leituras de arco. As observações fizeram-se em condições atmosphericas regulares. O erro provavel deve ser

$$\varepsilon = \pm 0^{m},22 \text{ proximamente};$$

e se attendermos a que as pontarias dirigidas a Palmella o foram ás ameias do torreão, objecto para mira não dos melhores, aindaque bem escolhido pela sua grande estabilidade, e se considerarmos que as trajectorias luminosas entre Serves-Palmella e entre Palmella-Observatorio passam n'uma grande extensão sobre a enorme bacia do Tejo, parece-nos que o resultado deve ser julgado como satisfactorio.

A illustre nação hespanhola, sempre solicita pelo desenvolvimento dos seus trabalhos geodesicos e topographicos, que ali foram ha pouco unidos ao ministerio do fomento, como base indispensavel dos melhoramentos de um estado que deseja marchar na vanguarda do verdadeiro progresso, não tem descurado a questão dos nivelamentos, e projecta nada menos do que ligar com um nivelamento de precisão o mar cantabrico e o Mediterraneo. Se isto se realisar, como é quasi certo, pois n'aquelle paiz são muito considerados, tanto os trabalhos geodesicos e topographicos, como os que os executam, seria talvez conveniente que entre nós se emprehendesse um trabalho identico, desde a foz do Guadiana até á do rio Minho, seguindo as cumeadas ou as estradas e os caminhos de ferro, conforme os meios empregados; pois esta linha extensa de nivelamento, sendo ligada por meio de uma transversal com a linha hespanhola, póde concorrer efficazmente para a determinação de seguros pontos de referencia que sirvam de base para a rigorosa hypsometria da Peninsula.

As questões de alta geodesia são de interesse internacional, e as nações vizinhas, principalmente, não podem deixar de entender-se para o bom exito dos trabalhos d'esta especie. Se as cartas e plantas são utilissimas para a vida dos differentes estados, a todos elles interessa o conhecimento da physica geral do globo, e é só pelo mutuo auxilio e amisade reciproca das nações cultas, que póde conseguir-se a resolução de tão elevado e vasto problema.

FIM

TÁBUA I

TANGENTES NATURAES

GRAUS E MINUTOS

′	0°	Dif.	1°	Dif.	2°	Dif.	3°	Dif.	4°	Dif.
0	0,0000000		0,0174551		0,0349208		0,0524078		0,0699268	
1	0,0002909	2909	0,0177460	2909	0,0352120	2912	0,0526995	2917	0,0702191	2923
2	0,0005818	2909	0,0180370	2910	0,0355033	2913	0,0529912	2917	0,0705115	2924
3	0,0008727	2909	0,0183280	2910	0,0357945	2912	0,0532829	2917	0,0708038	2923
4	0,0011636	2909	0,0186190	2910	0,0360858	2913	0,0535746	2917	0,0710961	2923
5	0,0014544	2908	0,0189100	2910	0,0363771	2913	0,0538663	2917	0,0713885	2924
6	0,0017453	2909	0,0192010	2910	0,0366683	2912	0,0541581	2918	0,0716809	2924
7	0,0020362	2909	0,0194920	2910	0,0369596	2913	0,0544498	2917	0,0719733	2924
8	0,0023271	2909	0,0197830	2910	0,0372509	2913	0,0547416	2918	0,0722657	2924
9	0,0026180	2909	0,0200740	2910	0,0375422	2913	0,0550333	2917	0,0725581	2924
10	0,0029089	2909	0,0203650	2910	0,0378335	2913	0,0553251	2918	0,0728505	2924
11	0,0031998	2909	0,0206560	2910	0,0381248	2913	0,0556169	2918	0,0731430	2925
12	0,0034907	2909	0,0209470	2910	0,0384161	2913	0,0559087	2918	0,0734354	2924
13	0,0037816	2909	0,0212380	2910	0,0387074	2913	0,0562005	2918	0,0737279	2925
14	0,0040725	2909	0,0215291	2911	0,0389988	2914	0,0564923	2918	0,0740203	2924
15	0,0043633	2909	0,0218201	2910	0,0392901	2913	0,0567841	2918	0,0743128	2925
16	0,0046542	2909	0,0221111	2910	0,0395814	2913	0,0570759	2918	0,0746053	2926
17	0,0049451	2909	0,0224021	2910	0,0398728	2914	0,0573678	2919	0,0748979	2926
18	0,0052360	2909	0,0226932	2911	0,0401641	2913	0,0576596	2918	0,0751904	2925
19	0,0055269	2909	0,0229842	2910	0,0404555	2914	0,0579515	2919	0,0754829	2925
20	0,0058178	2909	0,0232753	2911	0,0407469	2914	0,0582434	2919	0,0757755	2926
21	0,0061087	2909	0,0235663	2910	0,0410383	2914	0,0585352	2918	0,0760680	2925
22	0,0063996	2909	0,0238574	2911	0,0413296	2913	0,0588271	2919	0,0763606	2926
23	0,0066905	2909	0,0241484	2910	0,0416210	2914	0,0591190	2919	0,0766532	2926
24	0,0069814	2909	0,0244395	2911	0,0419124	2914	0,0594109	2919	0,0769458	2926
25	0,0072723	2909	0,0247305	2910	0,0422038	2914	0,0597029	2920	0,0772384	2926
26	0,0075632	2909	0,0250216	2911	0,0424952	2914	0,0599948	2919	0,0775311	2927
27	0,0078541	2909	0,0253127	2911	0,0427866	2914	0,0602867	2919	0,0778237	2926
28	0,0081450	2909	0,0256038	2911	0,0430781	2915	0,0605787	2920	0,0781164	2927
29	0,0084360	2910	0,0258948	2910	0,0433695	2914	0,0608706	2919	0,0784090	2926
30	0,0087269	2909	0,0261859	2911	0,0436609	2914	0,0611626	2920	0,0787017	2927
31	0,0090178	2909	0,0264770	2911	0,0439524	2915	0,0614546	2920	0,0789944	2927
32	0,0093087	2909	0,0267681	2911	0,0442438	2914	0,0617466	2920	0,0792871	2927
33	0,0095996	2909	0,0270592	2911	0,0445353	2915	0,0620386	2920	0,0795798	2927
34	0,0098905	2909	0,0273503	2911	0,0448268	2915	0,0623306	2920	0,0798726	2928
35	0,0101814	2909	0,0276414	2911	0,0451182	2914	0,0626226	2920	0,0801653	2927
36	0,0104724	2909	0,0279325	2911	0,0454097	2915	0,0629147	2921	0,0804581	2928
37	0,0107633	2909	0,0282236	2911	0,0457012	2915	0,0632067	2920	0,0807509	2928
38	0,0110542	2909	0,0285148	2912	0,0459927	2915	0,0634988	2921	0,0810437	2928
39	0,0113451	2909	0,0288059	2911	0,0462842	2915	0,0637908	2920	0,0813365	2928
40	0,0116361	2910	0,0290970	2911	0,0465757	2915	0,0640829	2921	0,0816293	2928
41	0,0119270	2909	0,0293882	2912	0,0468673	2916	0,0643750	2921	0,0819222	2929
42	0,0122179	2909	0,0296793	2911	0,0471588	2915	0,0646671	2921	0,0822150	2928
43	0,0125088	2909	0,0299705	2912	0,0474503	2915	0,0649592	2921	0,0825078	2928
44	0,0127998	2910	0,0302616	2911	0,0477419	2916	0,0652513	2921	0,0828007	2929
45	0,0130907	2909	0,0305528	2912	0,0480334	2915	0,0655435	2922	0,0830936	2929
46	0,0133817	2910	0,0308439	2911	0,0483250	2916	0,0658356	2921	0,0833865	2929
47	0,0136726	2909	0,0311351	2912	0,0486166	2916	0,0661278	2922	0,0836794	2929
48	0,0139635	2909	0,0314263	2912	0:0489082	2916	0,0664199	2921	0,0839723	2929
49	0,0142545	2910	0,0317174	2911	0,0491997	2915	0,0667121	2922	0,0842653	2930
50	0,0145454	2909	0,0320086	2912	0,0494913	2916	0,0670043	2922	0,0845583	2930
51	0,0148364	2909	0,0322998	2912	0,0497829	2916	0,0672965	2922	0,0848512	2929
52	0,0151273	2909	0,0325910	2912	0,0500746	2917	0,0675887	2922	0,0851442	2930
53	0,0154183	2910	0,0328822	2912	0,0503662	2916	0,0678809	2922	0,0854372	2930
54	0,0157093	2910	0,0331734	2912	0,0506578	2916	0,0681732	2923	0,0857302	2930
55	0,0160002	2909	0,0334646	2912	0,0509495	2917	0,0684654	2922	0,0860233	2931
56	0,0162912	2910	0,0337558	2912	0,0512411	2916	0,0687577	2923	0,0863163	2930
57	0,0165821	2909	0,0340471	2913	0,0515328	2917	0,0690499	2922	0,0866094	2931
58	0,0168731	2910	0,0343383	2912	0,0518244	2916	0,0693422	2923	0,0869025	2931
59	0,0171641	2910	0,0346295	2912	0,0521161	2917	0,0696345	2923	0,0871956	2931
60	0,0174551	2910	0,0349208	2913	0,0524078	2917	0,0699268	2923	0,0874887	2931

TABELLAS

PARA

SEGUNDOS

$1' = 2910$

10″	485
20	970
30	1455
40	1940
50	2425

$10'' = 485$

1″	48,5
2	97,0
3	145,5
4	194,0
5	242,5
6	291,0
7	339,5
8	388,0
9	436,5

$1' = 2920$

10″	486,7
20	973,4
30	1460,1
40	1946,8
50	2433,5

$10'' = 486,7$

1″	48,7
2	97,3
3	146,0
4	194,7
5	243,3
6	292,0
7	340,7
8	389,3
9	438,0

$1' = 2930$

10″	488,3
20	976,6
30	1464,9
40	1953,3
50	2441,6

$10'' = 488,3$

1″	48,8
2	97,6
3	146,4
4	195,3
5	244,1
6	292,9
7	341,7
8	390,6
9	439,4

TÁBUA II

VALORES DE qK²

K	qK^2	Dif.	K	qK^2	Dif.	K	qK^2	Dif.	K	qK^2	Dif.
m	m		m	m		m	m		m	m	
0	0,0000	0	1000	0,0659	27	2000	0,264	27	7000	3,232	93
20	0,0000	1	1020	0,0686	27	2100	0,291	28	7100	3,325	94
40	0,0001	1	1040	0,0713	28	2200	0,319	30	7200	3,419	96
60	0,0002	2	1060	0,0741	28	2300	0,349	31	7300	3,515	97
80	0,0004	2	1080	0,0769	29	2400	0,380	32	7400	3,612	98
100	0,0006	3	1100	0,0798	30	2500	0,412	34	7500	3,710	100
120	0,0009	4	1120	0,0828	30	2600	0,446	35	7600	3,810	101
140	0,0013	4	1140	0,0858	30	2700	0,481	36	7700	3,911	102
160	0,0017	4	1160	0,0888	31	2800	0,517	38	7800	4,013	104
180	0,0021	5	1180	0,0919	31	2900	0,555	39	7900	4,117	105
200	0,0026	6	1200	0,0950	32	3000	0,594	40	8000	4,222	106
220	0,0032	6	1220	0,0982	33	3100	0,634	41	8100	4,328	107
240	0,0038	7	1240	0,1015	33	3200	0,675	43	8200	4,435	109
260	0,0045	7	1260	0,1048	33	3300	0,718	44	8300	4,544	110
280	0,0052	7	1280	0,1081	34	3400	0,762	46	8400	4,654	112
300	0,0059	8	1300	0,1115	34	3500	0,808	47	8500	4,766	113
320	0,0067	9	1320	0,1149	35	3600	0,855	48	8600	4,879	114
340	0,0076	9	1340	0,1184	36	3700	0,903	49	8700	4,993	115
360	0,0085	10	1360	0,1220	36	3800	0,952	51	8800	5,108	117
380	0,0095	10	1380	0,1256	37	3900	1,003	52	8900	5,225	118
400	0,0105	11	1400	0,1293	37	4000	1,055	54	9000	5,343	119
420	0,0116	11	1420	0,1330	38	4100	1,109	55	9100	5,462	121
440	0,0127	12	1440	0,1368	38	4200	1,164	56	9200	5,583	122
460	0,0139	13	1460	0,1406	39	4300	1,220	57	9300	5,705	123
480	0,0152	13	1480	0,1445	40	4400	1,277	59	9400	5,828	125
500	0,0165	13	1500	0,1485	40	4500	1,336	60	9500	5,953	126
520	0,0178	14	1520	0,1525	40	4600	1,396	61	9600	6,079	127
540	0,0192	15	1540	0,1565	41	4700	1,457	63	9700	6,206	129
560	0,0207	15	1560	0,1606	41	4800	1,520	64	9800	6,335	130
580	0,0222	16	1580	0,1647	42	4900	1,584	65	9900	6,465	131
600	0,0238	16	1600	0,1689	42	5000	1,649	67	10000	6,596	
620	0,0254	17	1620	0,1731	43	5100	1,716	68			
640	0,0271	17	1640	0,1774	44	5200	1,784	69			
660	0,0288	17	1660	0,1818	44	5300	1,853	70			
680	0,0305	18	1680	0,1862	44	5400	1,923	72			
700	0,0323	19	1700	0,1906	45	5500	1,995	73			
720	0,0342	19	1720	0,1951	46	5600	2,068	75			
740	0,0361	20	1740	0,1997	47	5700	2,143	76			
760	0,0381	21	1760	0,2044	47	5800	2,219	77			
780	0,0402	21	1780	0,2091	47	5900	2,296	79			
800	0,0423	21	1800	0,2138	48	6000	2,375	80			
820	0,0444	22	1820	0,2186	48	6100	2,455	81			
840	0,0466	22	1840	0,2234	48	6200	2,536	82			
860	0,0488	23	1860	0,2282	49	6300	2,618	84			
880	0,0511	24	1880	0,2331	50	6400	2,702	85			
900	0,0535	24	1900	0,2381	51	6500	2,787	86			
920	0,0559	24	1920	0,2432	51	6600	2,873	88			
940	0,0583	25	1940	0,2483	51	6700	2,961	89			
960	0,0608	25	1960	0,2534	52	6800	3,050	90			
980	0,0633	26	1980	0,2586	52	6900	3,140	92			
1000	0,0659		2000	0,2638		7000	3,232				

$$\delta N = K \operatorname{tg} \alpha + qK^2$$

$$q = \frac{\frac{1}{2} - n}{R}$$

$$n = 0{,}08$$

$$R = 6367520 \text{ metros}$$