

ESTUDO

SOBRE OS

THEODOLITOS

POR

F. A. DE BRITO LIMPO

Coronel de Engenharia
Bacharel em Mathematica pela Universidade de Coimbra
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa
e Chefe da 1.^a Secção da Direcção Geral
dos Trabalhos geodesicos, topographicos e hydrographicos
de Portugal

LISBOA

Typographia da Academia Real das Sciencias

1891



ESTUDO

SOBRE OS

THEODOLITOS

ESTUDO

SOBRE OS

THEODOLITOS

POR

F. A. DE BRITO LIMPO

Coronel de Engenharia

Bacharel em Mathematica pela Universidade de Coimbra

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

e Chefe da 1.^a Secção da Direcção Geral

dos Trabalhos geodesicos, topographicos e hydrographico
de Portugal

MUNICIPIO DE BARCELOS

BIBLIOTECA MUNICIPAL

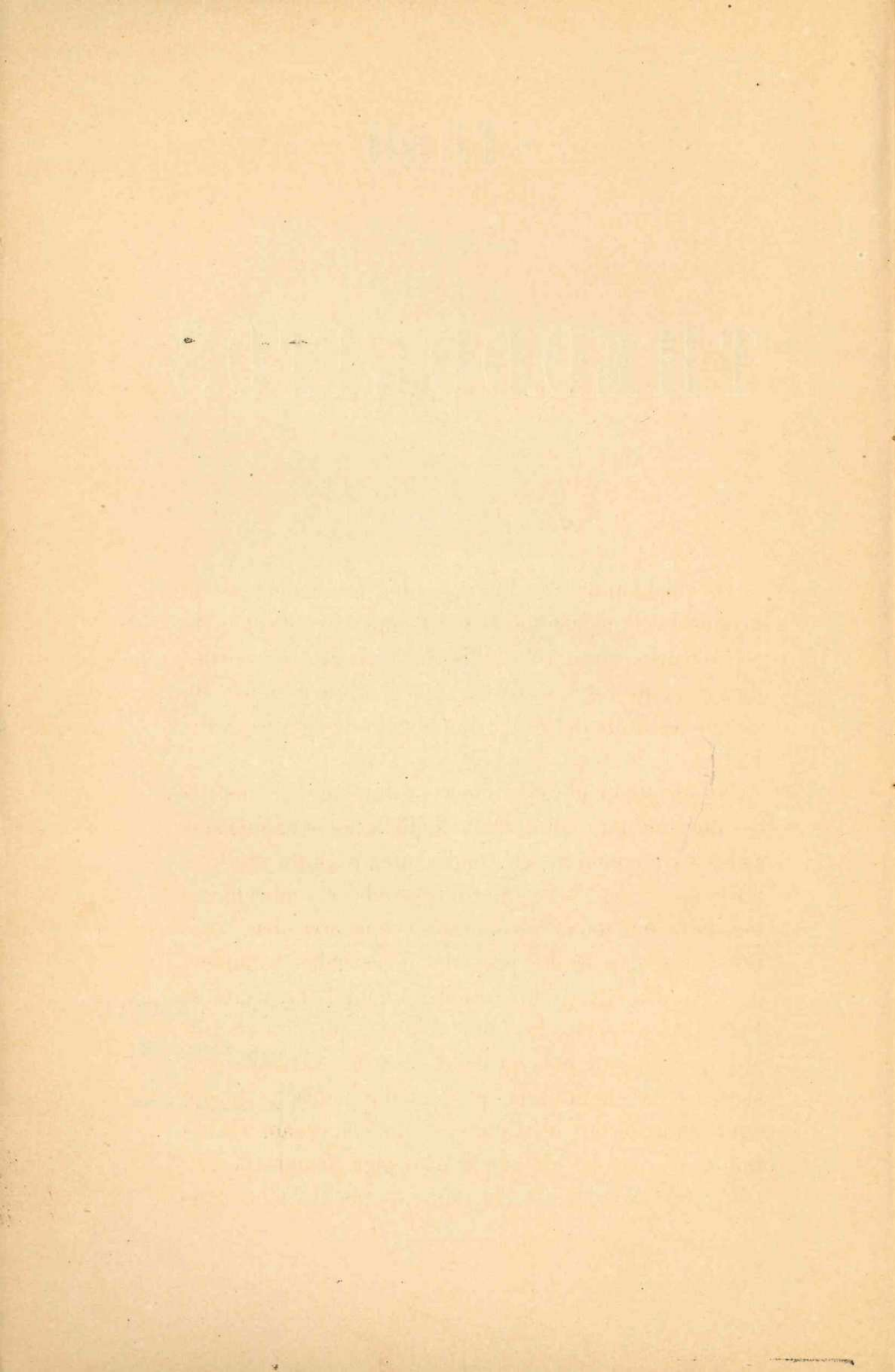
N^o 60688

*Revue
Barcelonaise*

LISBOA

Typographia da Academia Real das Sciencias

1891



INTRODUÇÃO

Os theodolitos são instrumentos fundamentaes de geodesia e topographia. O seu completo conhecimento e o seu uso, tornam-se indispensaveis aos que se dedicam ás profundas investigações sobre a figura da terra e aos trabalhos de levantamento de cartas e plantas.

No serviço de obras publicas costumam estes instrumentos ter uma continuada applicação: é sabido por todos os engenheiros e conductores o muito que importa manejar-os bem, quer nos simples reconhecimentos, quer em todas as operações que precedem sempre a organização dos projectos de estradas, caminhos de ferro, canaes e outros melhoramentos importantes. Uma grande parte das difficuldades, que embaraçam aos que entram pela primeira vez nos variadissimos serviços da engenharia, provêm da pouca pratica e conhecimento dos instrumentos que empregam. Os estudos nas escolas de applicação nem sempre podem ter o desenvolvimento conveniente, por diversas cau-

sas, sendo uma d'ellas os variados assumptos para que é preciso chamar a attenção dos alumnos.

Tratando dos theodolitos, poucas vezes nos referimos especialmente a este ou áquelle, dos muitos que teem sahido das officinas de diversos constructores: estabelecemos regras que devem ou podem applicar-se a todos elles, segundo o seu grau de perfeição e as circumstancias da pratica; pois é certo que só quem conhece a fundo um instrumento medidor poderá conscienciosamente praticar os desprezos e simplificações que os differentes casos comportam ou exigem, e não ateimar em obter resultados que ás vezes, pelas condições do mesmo instrumento, nunca poderia alcançar.

Emfim, estamos convencidos de que os completamente amestrados no emprego dos theodolitos, facilmente comprehenderão os outrosapparelhos de igual genero, como são os tacheometros, podendo sem receio encarregar-se de quasi todos os trabalhos topographicos e mesmo de alguns geodesicos, e devendo, por isso, ser bem acceitas todas as noções que tendam a facilitar a boa execução d'estes serviços. Nos differentes calculos, procurámos sempre empregar, quanto possível, os principios mais elementares de mathematica, para que maior numero de leitores podesse entrar sem embaraços na doutrina da presente Memoria.

ESTUDO

SOBRE OS

THEODOLITOS

I

Principios geraes

1. **Fórma geometrica e classificação dos theodolitos.**—Consideremos um ponto, ou fixo á terra, ou pertencente a outras quaesquer regiões do espaço; se por este ponto fizermos passar um raio visual, que suppomos prolongado indefinidamente, teremos, em relação ao observador e prescindindo dos effeitos da refração athmospherica, a projecção do dito ponto na esphera celeste.

O logar d'esta projecção pode conhecer-se tomando para referencia o plano horizontal e determinando as coordenadas esphericas: *altura e azimuth*.

Chamaremos, em geral, *theodolito* o instrumento pelo qual se obteem immediatamente estas coordenadas, ou, (o que vem a ser o mesmo) pelo qual determinamos a direcção azimuthal¹ e a distancia zenithal de um ponto.

Vê-se pois que o theodolito deve ter dois circulos graduados: um que se confunda permanentemente com o plano

¹ A direcção azimuthal deve ser referida ao meridiano do logar ou a um plano vertical qualquer, cujo azimuth verdadeiro poderá depois determinar-se, sendo necessario.

do horizonte; o outro perpendicular a este e podendo tomar todas as direcções em torno de um eixo cujo prolongamento seja a vertical do lugar do instrumento, lugar que é definido pelo centro do seu circulo horizontal.

Aos dois circulos graduados do theodolito dá-se tambem o nome de *limbos*.

Para fixar-se a direcção do raio visual e para fazer pontarias bem distinctas a qualquer objecto, é necessario um oculo que, estando preso ao instrumento, possa tomar todas as inclinações, em qualquer sentido. Este oculo, composto de dois systemas de lentes, ou de *ocular* e *objectiva*, desloca-se no plano vertical em torno de um eixo e acompanha o limbo de alturas nas suas digressões azimuthaes, isto é, tem movimentos em planos respectivamente perpendiculares.

Logo, no instrumento que nos occupa, depois de instalado para as observações, podemos distinguir duas partes principaes: uma fixa e outra movel. A parte fixa deve ser completamente invariavel; a movel deve girar em torno de dois eixos: um vertical, que passa pelo centro do limbo de azimuths; o outro horizontal, perpendicular ao limbo de alturas e passando pelo seu centro.

O eixo vertical pertence, como é forçoso, á parte fixa do instrumento, e o seu prolongamento determina, ou deve determinar, na esphera celeste o *zenith* e o *nadir*, polos do circulo de azimuths. O eixo horizontal, geometricamente falando, só acompanha os movimentos do oculo, quando se desloca azimuthalmente o limbo de alturas, e o seu prolongamento vae determinando na esphera celeste pontos do horizonte que são os polos respectivos áquelle circulo, nas suas successivas posições azimuthaes.

A fórma das peças que conteem os eixos costuma ser conica para o vertical e cylindrica para o horizontal, isto é, os eixos vertical e horizontal são constituídos por dois solidos terminados, o primeiro em superficie conica e o segundo em superficie cylindrica, ambas de secções circulares. O cylindro do eixo horizontal assenta geralmente em

duas peças em fôrma de V, que tomam o nome de *chumaceiras* ou *munhoneiras*; e os troncos do mesmo cylindro, que assentam e giram nas chumaceiras, chamam-se *munhões*.

Para reduzir os dois eixos ás suas posições normaes empregam-se geralmente os niveis, que podem ser moveis ou fixos, conforme o fim especial a que se destinam.

Os movimentos do oculo são referidos a um *index* no circulo horizontal e a outro no vertical. Estes indicadores mostram o deslocamento do oculo em azimuth e altura, e dão até certos limites os angulos percorridos. Porém, estes limites são grosseiros, porque não passam além das ultimas divisões dos limbos, que nos mais perfeitos theodolitos regulam entre 10 e 4 minutos. O ajustamento das pontarias é feito em parafusos proprios, e que se dizem de *reclamo* ou *ajustantes*.

Vê-se pois que os indicadores só dão as *leituras grossas* dos arcos percorridos, segundo os movimentos do oculo. Para avaliar estes arcos com maior precisão, que hoje se eleva a decimos de segundo, são necessarios os *nonios* ou os *microscopios micrometricos*.

A fôrma accessoria dos theodolitos, bem como as suas dimensões, variam consideravelmente segundo o fim especial a que se destinam, e, ás vezes, segundo a phantasia dos constructores. O proprio nome offerece mudanças. Assim aos grandes theodolitos de Troughton adoptados pelos inglezes nas triangulações de primeira ordem, e tambem empregados entre nós, dá o seu auctor o nome de *altazimuths* ou instrumentos de altura e azimuth, o que está muito em harmonia com a nossa definição. O seu oculo é recto e invariavelmente ligado ao limbo de alturas. O eixo vertical está igualmente fixo ao limbo de azimuths. Não pode repetir os angulos, mas sómente reiteral-os no circulo horizontal por meio de um apparelho em que assenta todo o systema e que facilita esta operação.

Aos theodolitos de Repsold e de Ertel chamam os seus auctores *instrumentos universaes*, na supposição de poderem

ser também empregados como instrumentos de passagens pelo meridiano ou por outro qualquer vertical. Esta qualidade que pode tornar-se extensiva aos de Troughton e aos outros theodolitos consideravelmente pesados, não é tão importante como se antolha, pois a estabilidade d'elles não pode ser tal que fiquem garantidos de mui sensíveis desvios de orientação. Os theodolitos de Repsold, e em geral os que para observações de 1.^a ordem são fabricados na Allemanha, distinguem-se pela fôrma do oculo, que é quasi sempre de cotovello com prisma reflectidor, e pela circumstancia de não serem os seus limbos invariavelmente fixos aos eixos, podendo, quando ao observador convenha, deslizar em torno dos mesmos eixos, empregando-se algum esforço manual. Estes instrumentos, de excellente construção, tem sido também empregados em Portugal.

Nos grandes theodolitos francezes (antigos) o oculo não corresponde geralmente á vertical que passa pelo centro do limbo de azimuths, havendo por isso erro consideravel de excentricidade, que tem de corrigir-se pelo calculo ou eliminar-se no acto das observações. Estes instrumentos distinguem-se também dos anteriores porque os seus limbos (azimuthal e vertical) podem ter com suavidade e precisão movimentos independentes dos eixos, e por isso são proprios para o systema das *repetições* dos angulos, sem excluir o das *reiteraões*¹.

Todos os theodolitos que deixamos indicados podem chamar-se de 1.^a classe, attendendo ás suas dimensões, á força dos oculos e á graduação dos limbos. O diametro d'estes regula entre 0^m,30 e 0^m,40; os oculos teem geralmente

¹ Foi ultimamente inventado em França para trabalhos geodesicos de primeira ordem um theodolito, que se distingue pela sua grande estabilidade, pela illuminação zenithal da graduação, e por ter no reticulo da ocular, além dos fios fixos, outros moveis por meio de um parafuso micrometrico primorosamente acabado. Este instrumento, construido em Paris nas officinas dos irmãos *Brunner*, é exclusivamente destinado á medição de angulos azimuthaes entre pontos proximos do horizonte, como são os vertices geodesicos.

0^m,04 a 0^m,06 de abertura livre, 0^m,4 a 0^m,7 de distancia focal e uma força amplificativa de 30 a 60 vezes. As ultimas divisões dos limbos regulam, como já dissemos, entre 10 e 4 minutos. Com estes elementos, com o auxilio de bons microscopios micrometricos ou de finissimos nonios, e empregando methodos racionaes, podem obter-se angulos com a approximação de 3 a 4 centesimos de segundo o que constitue, actualmente, o *desideratum* da geodesia.

Nos theodolitos de 2.^a classe, empregados em observações geodesicas de ordens inferiores, são menores as dimensões: os diametros dos limbos regulam de 0^m,15 a 0^m,25, e os arcos são subdivididos, geralmente, de 10 em 10 minutos; o oculo costuma ser recto, e quasi sempre, em vez de um só, existem dois, servindo o inferior de fiel¹. Este appendice torna-se muito necessario por causa da menor estabilidade do instrumento, que se colloca em tripé de madeira. Os theodolitos inglezes d'esta classe são repetidores no limbo azimuthal e não no vertical, ainda que, em pequenos angulos de altura ou depressão, possam obter-se algumas repetições forçando os parafuzos nivelantes que assentam no tripé. Alguns dos theodolitos francezes são repetidores em ambos os limbos. Os de procedencia allemã obedecem aos principios dos grandes instrumentos da mesma origem, isto é, não repetem, mas podem reite-
rar os angulos com facilidade.

Finalmente os theodolitos de 3.^a classe são, de todos, os mais portateis e por isso empregam-se geralmente nos reconhecimentos para construcção de estradas, caminhos de ferro, etc., e tambem na determinação de pontos subsidarios para os levantamentos geographicos, chorographicos e topographicos. O diametro dos limbos regula por 0^m,08 a

¹ O emprego do fiel pode estender-se aos theodolitos de primeira classe, e alguns ha, principalmente os de construcção franceza, que o possuem. W. Struve recommenda instantemente o seu uso, como sendo o mais poderoso meio de indicar a invariabilidade dos instrumentos empregados na medição dos angulos geodesicos.

0^m,12; os nonios são de minuto, isto é, apreciam directamente um minuto; o oculo é recto e poucas vezes acompanhado de outro para fiel. Algumas das rectificações essenciaes aos instrumentos de 1.^a e 2.^a classe não podem conseguir-se n'estes, suppondo-se que sahiram sufficientemente rectificados das mãos do artista. Esta circumstancia só é admissivel attendendo á natureza do nonio e ás dimensões do limbo, pois é natural que os erros provenientes da imperfeita rectificação sejam muito inferiores aos da apreciação dos angulos nos circulos graduados. M. d'Abbadie, distincto geographo, inventou um theodolito, que, pertencendo a esta classe, gosa de algumas vantagens pela posição constantemente horizontal do oculo munido de um prisma de reflexão total em frente da objectiva.

Pelo que fica exposto, vê-se a difficuldade que existe em obter uma systematica e boa classificação d'estesapparelhos de medir angulos. Dividil-os em *reiteradores* e *repetidores* não nos parece o melhor methodo, pois além dos repetidores poderem ser reiteradores, temos theodolitos em que essas qualidades se extendem só a um dos limbos (o horizontal). Além d'isto, estando quasi abandonada a repetição dos angulos, os theodolitos d'este systema devem ir desaparecendo da pratica.

Á falta de outras distincções que nos servissem de base, tivemos por melhor formar tres grupos, segundo a força e precisão dos instrumentos, ficando por isso estes reduzidos a tres classes ou cathegorias. E emquanto á denominação de *universal*, altazimuth, etc., julgamos preferivel a de *theodolito*, visto ser a geralmente adoptada e abranger todas as classes, ainda que este nome se applicasse antigamente aos instrumentos que só mediam angulos no plano horizontal, por estarem privados do circulo de alturas, que hoje quasi sempre os acompanha.

Trataremos agora desenvolvidamente das peças principaes do theodolito.

2. Limbos.—O azimuthal e vertical dos instrumentos

de primeira classe são sempre círculos inteiros. São também círculos completos os azimuthaes de segunda e terceira classe; porém os verticaes respectivos só abrangem, as mais das vezes, uma porção de circumferencia: assim nos theodolitos de Troughton o limbo de alturas não passa, quasi sempre, de 180° graus; e, nos mais portateis, compõe-se de dois segmentos oppostos, tendo cada um cerca de 80° graus de extensão.

O limbo truncado é inadmissivel em instrumentos de primeira classe pela perturbação que necessariamente causa na exacta apreciação dos angulos. Nos outros não deixa de ser um defeito, que se tolera, attendendo ao menor peso e volume com que fica o theodolito, ás observações menos delicadas a que é destinado e á natureza dos seus nonios. Effectivamente, quando o nonio fôr de minuto, ou mesmo de 30 segundos, o grau de approximação nas leituras de arco será quasi sempre inferior ao erro motivado pela forma incompleta do limbo.

Um limbo truncado, além dos erros inherentes á graduação, está sujeito a deseguaes dilatações; e estes defeitos serão ainda maiores, se elle fôr composto de duas secções distinctas.

A graduação do azimuthal segue sempre desde *zero* até 360° , e quasi sempre corre da esquerda para a direita, suppondo-nos no centro do circulo¹. Costuma acontecer o mesmo quando o vertical é completo; porém algumas vezes a graduação n'este circulo segue para um e outro lado do zero até terminar, no mesmo ponto opposto, em 180° .

Quando o vertical é truncado, a graduação caminha diversamente. Assim: nos semi-círculos dos theodolitos inglezes o zero occupa quasi sempre a parte inferior, e os numeros seguem para um e outro lado até 90 graus, ou pouco

¹ Suppomos a graduação *sexagesimal*, por ser quasi universalmente empregada. No caso de ser *centesimal*, diríamos o mesmo, *mutatis mutandis*.

mais; nos limbos formados de dois segmentos diametralmente oppostos o zero existe na parte central de cada um e a graduação caminha para os lados até ás extremidades, que indicam 40 graus geralmente. Os segmentos devem estar collocados por fôrma que os seus zeros fiquem sobre uma recta que passe em angulo recto pelo eixo vertical do theodolito e elles proprios pertençam á mesma circumferencia, cujo centro deve existir no dito eixo.

A superficie em que é traçada a graduação dos limbos abrange uma faxa que pode ser plana, conica ou cylindrica. Sendo plana, devem os prolongamentos dos traços concorrer todos no centro do circulo. Se fôr conica, cada traço deve fazer parte da geratriz de um cone recto cuja base circular é o proprio limbo. Finalmente na superficie cylindrica os traços são parallellos entre si e existem n'um cylindro recto de que o limbo é tambem a base circular. Comtudo a graduação d'esta especie está muito pouco em uso, sendo empregada quasi exclusivamente a plana e a conica.

A graduação plana é aquella que melhor se presta ao traçado; por isso devia ser preferida sempre, a assim acontece em todos os limbos verticaes. Mas a conica não deixa muitas vezes de ser empregada no limbo de azimuths por tornar mais commodas as leituras. Com effeito, devendo estas ser feitas normalmente á superficie graduada, por meio dos nonios ou dos microscopios micrometricos, torna-se constrangida a posição do observador para apreciar bem os angulos horizontaes nos limbos planos; enquanto que nos de superficie conica a normal tem uma inclinação que permite um facil accesso.

Nos theodolitos de primeira classe construidos por Troughton é plana a graduação em ambos os circulos, porém a ocular dos micrometros do azimuthal, que são verticaes, vem munida de um pequeno prisma amovivel, para que as leituras possam fazer-se com maior commodidade, olhando o observador obliquamente ao horizonte.

Nos theodolitos de Repsold costuma ser conica a gradua-

ção do azimuthal, tendo por isso os micrometros d'este limbo a devida inclinação.

Finalmente, nos theodolitos de segunda e terceira classe, inglezes, tambem se encontra quasi sempre a gradação conica no circulo de azimuths.

3. Oculos.—Suppomos que o leitor conhece todos os principios em que se fundam os oculos astronomicos; por isso temos por desnecessario dar explicações prévias ácerca de algumas leis de optica.

Os oculos dos theodolitos constam principalmente: 1.º de um tubo metalico *ttt*, que pode ser (fig. 1 e 2) direito ou quebrado em angulo recto, contendo na extremidade oposta ao observador, ou voltada para os objectos externos, um systema *ob* de duas ou mais lentes justapostas, de materias differentes (*crown-glass* e *flint-glass*) para evitar o effeito devido á *dispersão* da luz, systema este que é denominado objectiva achromatica ou simplesmente *objectiva*; 2.º de outro systema *o'c* de lentes, em tubo proprio, que occupa a extremidade voltada para os olhos do observador e que se denomina *ocular*; 3.º de um diafragma focal *FF* destinado a interceptar os raios luminosos mais divergentes, que, sendo refractados irregularmente perturbariam a distincta percepção da imagem dos objectos. É n'este diafragma, tambem collocado em tubo proprio *rr*, que existe o reticulo.

Tem, pois, o oculo tres partes mais distinctas *ttot*, *o'c*, *rr* que podem occupar longitudinalmente, por meio de tiragens, posições relativas differentes, conforme a vista do observador e a distancia do ponto de mira.

Quando existir a fôrma de cotovello (fig. 2) é indispensavel um espelho, ou melhor um prisma *e*, que envie em angulo recto para a ocular os raios luminosos colhidos pela objectiva. Este prisma está seguro pela parte posterior a uma tampa *ss* que se ajusta por meio de parafusos ás paredes do oculo, e que, sendo desatarrachados os mesmos parafusos, pode destacar-se, trazendo comsigo o prisma,

operação que se torna indispensavel para a limpeza e rectificação do mesmo prisma.

Seria necessario, para que a objectiva gozasse de achromatismo perfeito, empregar um systema de sete lentes unidas; mas para evitar a perda de luz que d'ahi resultaria, contentam-se ordinariamente os constructores com duas ou quando muito tres, formando uma lente composta. Além d'isto, é conveniente o emprego de diafragmas, para interceptar os raios extremos do cone luminoso, que são os que mais influem na *aberração de esphericidade*. Um outro diafragma contém, como já dissemos, o reticulo, e estaciona no proprio lugar em que se fórma a imagem.

A dispersão da luz, ou chromatismo, é na ocular simples muito menos sensivel que na simples objectiva. Comtudo convém empregar um systema ocular achromatico, ou composto, sobretudo se os olhos teem grande amplificação.

As oculares compostas são de duas especies: *negativas* e *positivas*. A ocular negativa consta de dois vidros convergentes plano-convexos. O primeiro intercepta os raios luminosos que iriam formar no foco principal a imagem real, que o segundo vidro amplifica e transforma em virtual, e cuja impressão é recebida pelo observador. Acha-se pelo calculo o desvio dos dois vidros e a sua curvatura, de modo que a ultima imagem seja achromatica.

A ocular positiva, ou de Ramsdem, consta tambem de duas lentes ordinariamente simples e plano-convexas, mas ficam ambas áquem do foco principal, ou do reticulo. Como na ocular negativa, a curvatura dos vidros e o seu desvio são combinados de modo que o achromatismo exista; mas se é exigido maior rigor, então cada lente deve ser composta por duas reunidas, uma plano-convexa, de *flint-glass*, e outra biconvexa de *crown-glass*.

Na ocular de Ramsdem a distancia dos dois vidros (compostos ou simples) é constante, podendo approximar-se do reticulo todo o systema, ou afastar-se, e por isso satisfaz sempre ás condições de achromatismo; na ocular negativa fica o reticulo entre os vidros, sendo necessario n'este caso

fazer variar a distancia relativa d'elles segundo o grau de vista do observador, o que perturba um pouco as condições opticas do systema.

Dada a mesma distancia focal principal, a totalidade do comprimento do oculo será maior com a ocular de Ramsdem, menor com a simples, e ainda menor com a negativa. Ora a ocular simples não deve empregar-se, por causa do defeito de achromatismo; e a negativa, que é mui propria quando quizermos um oculo de menor comprimento, tem o inconveniente referido. Os theodolitos são dotados hoje, quasi sempre, com a ocular de Ramsdem.

Qualquer d'estas oculares (Ramsdem, negativa e simples) transmite como é sabido a imagem invertida dos objectos, o que nada influe nas observações dos angulos; comtudo, em quasi todos os instrumentos, costuma haver de reserva oculares directas, nas quaes, pela interposição de uma terceira lente, se consegue que a ultima imagem emittida tenha a posição natural do objecto que representa. Taes oculares são pouco empregadas por observador habil, que prefere as outras, por darem imagens mais definidas.

Os centros de curvatura das lentes devem existir na mesma linha recta, que se denomina *eixo optico*, e este eixo deve coincidir com o do tubo do oculo. Compete aos artistas obter, quanto possivel, tal disposição.

Se o tubo fôr de cotovello, o feixe luminoso que entra pelo centro da objectiva deverá sahir pelo centro da ocular; isto é, o eixo optico, quebrado em angulo recto pela interposição do prisma, deverá confundir-se, quanto possivel, com os eixos respectivos aos dois braços do oculo. N'este caso a parte do tubo comprehendida entre a ocular e o prisma pode considerar-se como a continuação rectilinea da que fica entre o mesmo prisma e a objectiva. Uma tal disposição faculta o emprego de um oculo de maior distancia focal, abrangendo extensão longitudinal menor.

A fôrma do reticulo varia muito nos diversos theodolitos. Os seus fios são geralmente de aranha. Dois, encruzados em angulo recto, constituem o reticulo simples. Nos

theodolitos inglezes de segunda e terceira classe o reticulo consta de tres fios, um horizontal e dois obliquos, encruzando-se todos n'um ponto (fig. 3). Nos theodolitos de primeira classe (altazimuths) de Troughton existem geralmente nove, tres horizontaes, quatro verticaes e dois obliquos (fig. 4). Finalmente nos theodolitos, tambem de primeira classe, allemães, existem quasi sempre oito fios, dois horizontaes e seis verticaes (fig. 5); os verticaes do centro e os horizontaes teem breve intervallo, em ordem a formarem pela intersecção um pequeno quadrado, que deve corresponder ao eixo do tubo respectivo e que define a direcção do eixo optico do oculo, que tambem se chama *linha de collimação*. Este quadrado serve para dirigir as pontarias por fórma que a imagem do objecto a que se aponta occupe o seu centro, evitando-se assim o erro que pode provir da grossura dos fios; e tal disposição é em extremo util quando os pontos de mira são mui distantes, como as estrellas ou quaesquer focos luminosos, ou mesmo pequenos signaes quadrangulares, sobretudo sendo pintados de preto e projectando-se no céu.

Se os objectos a que se dirige pontaria tiverem a fórma pyramidal, como acontece aos nossos signaes geodesicos, então não deixa de ser proprio qualquer dos reticulos representados pelas fig. 3 e 4, por causa dos fios obliquos, que podem sobrepor-se á imagem do objecto ou signal, abrangendo-o symetricamente.

Os oculos de cotovello ou quebrados em angulo recto, além de occuparem extensão menor, teem a vantagem de fazer com que a vista do observador se exerça em direcção horizontal, que é a constante direcção do braço do tubo que contém a ocular. Esta circumstancia é muito apreciavel nas observações dos astros, pois, qualquer que seja a altura d'elles, nunca necessita de constranger-se a posição do observador. Comtudo o emprego do prisma faz perder ás imagens dos objectos parte da luz, tornando-se por isso menos claras. Ainda assim, estando muito diaphana a atmosphera, podem fazer-se com estes oculos excellentes pontas-

rias, mesmo a pontos terrestres; e se estes consistirem em focos luminosos, como os heliotropos, então nada haverá a desejar.

Se o oculo fôr recto, serão impossiveis muitas observações astronomicas sem o auxilio de oculares prismaticas, ou de cotovello; por isso os theodolitos de primeira classe, assim dispostos, costumam ter de reserva oculares d'esta especie para serem empregadas, quando necessarias, e tambem alguns vidros corados para as observações do sol, vidros que acompanham quasi todos os theodolitos e todos os sextantes e circulos de reflexão.

Com a ocular prismatica podem observar-se astros mais ou menos afastados do zenith, mas não com tanta commodidade como no oculo de cotovello que deixamos descripto.

Quando se começam as pontarias é indispensavel, para que sejam bem feitas, proceder á graduação do oculo. Primeiramente afasta-se ou approxima-se do reticulo a ocular até que os fios se vejam distinctamente. Esta manobra é quasi sempre feita directamente com a mão. Depois, se não fôr julgada como infinita a distancia do objecto apontado, a sua imagem real formar-se-ha para aquem do foco da ocular aonde está o reticulo: logo, sem variar a distancia entre o mesmo reticulo e a ocular, será necessario ou afastal-o da objectiva ou afastar esta d'aquelle, operação que se consegue facilmente por meio de uma haste dentada, onde engrena um parafuso fixo; e tambem com um simples parafuso actuando no braço de pequena alavanca, da qual o outro braço arrasta a parte do tubo que se quer mover. D'este modo, ou se desloca a objectiva afastando-a ou approximando-a do reticulo (como acontece nos theodolitos inglezes de segunda e terceira classe), ou se move longitudinalmente o tubo a que está preso o reticulo, tubo que tambem desloca comsigo, sempre á mesma distancia, o systema ocular.

Conseguir-se-ha, pois, facilmente, não só a perfeita visibilidade do reticulo, mas tambem que as imagens dos obje-

ctos sejam vistas com toda a clareza que o estado da atmosphera e a força do oculo comportam.

A amplificação angular g das imagens tem limites assaz estreitos. Seja F a distancia focal da objectiva e F' a da ocular, teremos, approximadamente, para as grandes amplificações:

$$g = \frac{F}{F'}.$$

Ora o valor de F é limitado por diversos motivos, e F' nunca poderá approximar-se muito de zero por causa dos inconvenientes que resultam de oculares extremamente pequenas; portanto a força amplificativa dos oculos, que theoreticamente parece poder augmentar de um modo indefinido, fica praticamente reduzida a limites pouco extensos, sobretudo em instrumentos portateis.

Nos theodolitos de segunda classe, inglezes, e mesmo em alguns de terceira, costumam os oculos ser amoviveis, podendo desligar-se do vertical quando terminam as observações, e adaptar-se-lhe quando ellas principiam. Faz-se a separação no acto de guardar o instrumento em caixa propria, para que as peças inferiores fiquem mais alliviadas do peso. Nos theodolitos de primeira classe, andando o oculo permanentemente ligado com o vertical, é costume separar-se todo o systema, que tem caixa independente da do azimuthal.

Quando o oculo é amovivel ou livre, está munido de dois anneis exteriores e cylindricos, pelos quaes se prende ao limbo de alturas, assentando em duas chumaceiras e fixando-se por meio de argolas ou travessas que os cingem. Se estas argolas se afastarem ou alargarem poderá o oculo girar em torno do seu eixo longitudinal, o que facilita a centralisação dos fios do reticulo, como adeante veremos.

É muito conveniente que a materia de que são compostos os tubos do oculo, esteja disposta por fórma que ella fique em equilibrio em torno dos munhões M (fig. 1 e 2), qualquer que seja a posição occupada; por isso nos de co-

tovello costuma annexar-se-lhes o contrapeso P para que se mantenha o equilibrio, o qual deve estender-se a todo o instrumento, por fôrma que a resultante do peso de todas as peças da parte movel do theodolito se confunda em direcção, quanto possivel, com o seu eixo vertical.

Como vimos, é indispensavel o reticulo do oculo para poderem fazer-se as pontarias, porém, os seus fios estão sujeitos a quebrar-se, por diversas causas. Qualquer observador, mesmo isolado n'uma serrania, debaixo de uma barraca, pode renovar o reticulo sem grande difficuldade. Eis como se procede: procuram-se fios de aranha do matto, que se encontram em pequenas teias (é mais seguro tel-os de reserva); extrae-se do oculo o diafragma (fig. 6) e, limpando-se este por fôrma que os traços r , ou leves ranhuras, que definem a direcção dos fios, fiquem isentas de qualquer impureza, colloca-se sobre um apoio a de modo que as extremidades estejam livres; escolhe-se um fio de extensão conveniente e prendem-se-lhe nas extremidades duas pequenas barras de chumbo; pegando por uma das barras e levantando-a, o fio ficará distendido pelo peso da outra barra; mergulha-se assim, sempre suspenso, n'um vaso de agua (se fôr quente, melhor); retira-se logo e applica-se na competente ranhura do diafragma, deixando pender nas extremidades as pequenas barras. O mesmo se pratica com todos os outros fios até ficar completo o reticulo (fig. 7), o que se verificará com auxilio de lupa. Em seguida, com uma penna ou pincel fino, chega-se a cada ranhura uma ligeira porção de verniz ou de qualquer liquido que pelo contacto do ar fortemente se solidifique. Cobre-se tudo com uma campanula (um copo) até que, decorrido algum tempo, tenha tido logar a completa solidificação. Depois com um canivete raspam-se as extremidades do diafragma, para que os pesos, ou pequenas barras de chumbo se destaquem, levando consigo as porções de fio sobressalentes. Estará prompto o reticulo; e o respectivo diafragma deve depois collocar-se no seu logar com todas as cautelas devidas a tão delicado appendice.

4. Niveis.—O nivel, em geral, compõe-se de um tubo de vidro ligeiramente curvo, fechado nas duas extremidades e cheio quasi inteiramente de um liquido muito fluido, como o alcool e o ether, ficando o restante espaço occupado pelo vapor do mesmo liquido, que produz a denominada *bolha de ar*.

A posição do nivel é proximamente horizontal, mas a bolha de ar procura sempre a parte superior do tubo e tende a collocar-se de modo que a linha de prumo seja perpendicular ao plano tangente do seu ponto culminante. A aresta superior do referido tubo deve formar parte da circumferencia de um circulo de grande raio, e ser mais ou menos graduada, para poder reduzir-se a peça em que assenta o nivel a uma horizontalidade constante, ou avaliar-se a sua pequena inclinação sobre o horizonte.

Duas são geralmente as fórmulas geometricas dadas aos tubos dos niveis¹. A primeira pode considerar-se gerada por um pequeno circulo cujo centro se mova constantemente na circumferencia de outro muito maior, sendo os seus planos respectivamente perpendiculares. Assim (fig. 8), Mc representa o raio do grande circulo, cc' uma parte da sua circumferencia, c o centro do pequeno circulo gerador mm' , e $mm'nn'$ o tubo gerado. A segunda é a de um perfeito solido de revolução. Imaginemos o segmento do circulo eo e seja ee a corda; tomando esta como eixo, façamos girar o arco eo em torno d'ella: resultará o solido eo , que, se fôr cortado por planos nn' perpendiculares ao eixo, dará um tubo perfeitamente symetrico.

A primeira d'estas fórmulas, que vemos descripta em muitos livros, é defeituosa na pratica. Com effeito: só duas arestas, a superior e inferior, ou mn e $m'n'$, pertencem ao mesmo plano do circulo cujo centro é M , e por isso a linha culminante da bolha de ar deveria existir constantemente na aresta nn ; mas para tal coincidência ter logar é

¹ Abstrahimos da espessura das paredes dos tubos, a qual deve ser completamente uniforme.

necessario que seja vertical o plano commum ás ditas arestas concentricas, condição mui difficil de conseguir-se. Portanto a bolha de ar deslocando-se as mais das vezes n'uma curva que se afasta, ainda que pouco seja, do arco de circulo, não poderá indicar as inclinações segundo uma lei simples e conhecida.

Na segunda fôrma do nivel, qualquer plano que passe pelo seu eixo longitudinal determinará nas paredes do tubo dois arcos de circulo de igual raio, ou de raio constante, e symetricos em relação ao mesmo eixo; por isso temos a certeza de que será sempre circular, e constante, a aresta superior.

Os modernos niveis são feitos segundo estes principios, ficando com a fôrma do solido de revolução que definimos; mas não julgamos necessario tratar aqui dos processos da sua construcção ou acabamento, qualquer que seja a fôrma adoptada.

Suppondo horizontal o eixo do nivel, a bolha de ar, em virtude do maior peso do liquido contido no tubo, occupará, como dissemos, a sua parte superior. Imaginemos agora a mesma bolha reduzida a um ponto, e correspondente a esse ponto, que deve ser o mais elevado, pratiquemos um traço em direcção transversal e que fique n'um plano perpendicular ao eixo do tubo: costuma ser esta quasi sempre a origem da graduação que, em divisões equidistantes, segue para um e outro lado do dito traço, tomado como *zero*.

Se o eixo do nivel, ou os seus apoios, se desviarem do horizontalismo, veremos o ponto que representa a bolha de ar afastar-se da posição original. O arco percorrido (pondo de parte algumas pequenas perturbações devidas ao attrito e á capillaridade) será a medida da inclinação accusada pelo nivel, isto é, do angulo que n'este caso fôrma com o horizonte a tangente ao ponto zero. Designem: s a extensão linear d'este arco, ou da parte que medeia entre o *zero* e o ponto que representa a bolha de ar, i a inclinação do nivel expressa em segundos, ρ o raio do circulo director da curvatura do tubo; teremos a seguinte relação:

$$\frac{s}{\text{sen } 1''} = \rho \cdot i$$

ou

$$s = \frac{\rho}{206265} \cdot i.$$

Logo, dada a mesma inclinação, a grandeza do desvio da bolha cresce proporcionalmente com o raio ρ . Se quizermos um tubo graduado de 2 em 2 millímetros, correspondendo a cada divisão um arco de $1''$, temos $s = 0^m,002$, $i = 1$, e portanto $\rho = 412^m,53$.

Vê-se pois que a *sensibilidade* do nível será tanto maior quanto mais extenso fôr o seu raio de curvatura; mas esta extensão é limitada pela excessiva mobilidade da bolha, que nunca deve sahir fôra do espaço graduado, suppondo o nível no seu estado normal ou rectificado proximamente.

Se o tubo tiver a primeira fôrma que indicamos (fig. 8), é só uma a aresta susceptível de receber a gradação; mas se fôr gerado conforme o segundo systema (fig. 9), qualquer das arestas pode ser graduada. Dado este caso, que é hoje como dissemos, o mais geral, convirá, ainda assim, escolher de entre as arestas ou geratrizes aquella que estiver mais regular, pois, por maior cuidado que haja no roçamento e conclusão do tubo, é natural que não exista em todas o mesmo grau de perfeição.

Para proceder a esta escolha e para estudar depois com miudeza as condições da aresta adoptada (este ultimo estudo deve estender-se a todos os tubos, qualquer que seja a sua fôrma) emprega-se geralmente o *zygometro* ou examinador de niveis.

Consta este instrumento, geralmente, de duas fortes barras metallicas deseguaes AB e CD em fôrma de cruz rectangular, munidas, nas extremidades, de tres parafusos nivelantes $p_1 p_2 p_3$ (fig. 10 e 11, planta e alçado). As barras sustentam pela parte superior outras duas de igual feitio mas de menores dimensões, cujo systema pode girar em orno do eixo ee , apoiando-se a mais comprida cd n'uma

placa de vidro ss por meio do parafuso P , o qual, collocado junto da extremidade d deve ser muito fino e perfeito, e estar munido de um grande tambor graduado. O tambor, girando em torno do eixo vertical do parafuso, faz passar a graduação em frente do index fixo I para, por meio de leituras de arco, poderem avaliar-se as diferenças de inclinação longitudinal da barra cd . Ao longo d'esta barra superior existem os cursores m tendo superiormente dois ou mais montantes em fôrma de V , com faces paralelas, destinados a receber os níveis e podendo afastar-se ou approximar-se conforme o comprimento dos mesmos.

Todo o systema deve assentar n'uma superficie plana KKK , firme quando possivel e proximamente horizontal.

Depois de ser cuidadosamente determinada a distancia f do eixo do parafuso graduado P á linha ee , eixo do systema superior dcb , e conhecida a grandeza v do passo do parafuso P , facilmente poderá avaliar-se a natureza da graduação do tambor. Assim, $\frac{v}{f}$ será a tangente do angulo

correspondente a uma volta completa, e $\frac{v}{f} \cdot 206265$ o proprio angulo. Se o tambor do parafuso tiver T divisões, o valor angular de cada uma d'ellas será, em segundos,

$$\frac{v}{f} \cdot \frac{206265}{T}.$$

Para $f=0^m,85$, $v=0^m,0005$, $T=120$ divisões, teremos:

$$\frac{v}{f} 206265 = 120'',2; \quad \frac{v}{f} \cdot \frac{206265}{T} = 1'',0017.$$

Portanto, n'este caso, cada divisão do tambor corresponde a um deslocamento angular de $1'',0017$.

Procede-se ao exame do tubo do nivel da seguinte maneira. Nivelase proximamente o systema inferior ABC com os parafusos proprios e um nivel auxiliar, que deve ficar

depois sobre o pequeno braço ab para affiançar a sua horizontalidade; afastam-se os montantes m conforme o comprimento tt do tubo, e colloca-se este por cima. Estando assim tudo preparado, anda-se com o parafuso P até que uma das extremidades da bolha de ar se approxime de uma das extremidades do tubo do nivel fazendo-se corresponder o index do tambor a nma divisão exacta; depois girar-se-ha com o tambor successivamente, e no mesmo sentido, uma fracção constante da sua circumferencia, que pode ser igual a 1, 2, 3... divisões, conforme o grau de sensibilidade do nivel, de que pode haver previamente um conhecimento grosseiro. Reconhecer-se-ha por este modo se aos deslocamentos eguaes do tambor correspondem outros tambem eguaes na bolha de ar; e feita a experiencia em differentes arestas, escolher-se-ha aquella em que a proporcionalidade entre os espaços percorridos n'uma e n'outra parte fôr mais rigorosa¹.

Para determinar-se a graduação do tubo colloca-se este nos montantes de modo que seja culminante a aresta escolhida ou examinada. Depois, suppondo que o zygometro continua rectificado como indicámos, desvia-se a bolha de ar pelo movimento do parafuso P até que, sempre livre, se approxime de uma das extremidades do tubo, não indo além dos pontos examinados, e toma-se nota dos limites da bolha, que se assignalam, e da divisão marcada pelo index do tambor; anda-se com este até que a bolha occupe a outra extremidade symetrica: a differença das leituras (tendo attenção á passagem por zero, se a houver) dará em segundos o espaço δ percorrido pela bolha, e dividindo este em n partes eguaes teremos feito a graduação, ou obtido a sua grandeza.

A graduação dos niveis costuma ter o zero ao meio do tubo; e ainda que o traço indicativo da origem não exista,

¹ A fôrma do zygometro que apresentamos, salvas algumas minuciosidades, é a que nos pareceu mais racional; comtudo ha muitas especies, que não variam na essencia.

suppõe-se existir, começando a graduação a igual distancia, para um e outro lado, pela suppressão de um certo numero de traços. Tambem poderá correr seguidamente, e principiar n'uma das extremidades do tubo.

Temos supposto a bolha de ar reduzida a um ponto, e o tubo do nivel sem espessura nas suas paredes, hypotheses que estão longe da realidade. Porém a primeira pode julgar-se rigorosa logo que seja tomada a média das leituras feitas nas duas extremidades da bolha, como adeante veremos; a segunda não é necessaria, attendendo a que a espessura é constante em toda a extensão do tubo, ou pelo menos assim deve ser, para que a curvatura exterior seja igual á interior e para que as dilatações por mudanças de temperatura se manifestem com uniformidade.

Só costumam ser graduados os niveis de grande raio de curvatura, empregados em avaliar as pequenas differenças de verticalismo ou horizontalismo nos instrumentos astronomicos propriamente ditos, nos theodolitos de primeira classe ou, quando muito, de segunda, e nosapparelhos especiaes do nivelamento. Fóra d'estes casos os niveis só apresentam ordinariamente dois ou tres traços (um ao meio e dois aos lados) para poderem rectificar-se com os parafusos annexos, e chamar-se a bolha de ar ao meio do tubo, o que, dada a rectificação, attesta o horizontalismo dos eixos ou superficies a que os mesmos niveis se applicam.

O tubo de vidro, fechado hermeticamente, construido, em summa, segundo as regras que lhe dão as propriedades de nivel, necessita ser revestido por uma armadura metallica, não só para maior resguardo de qualquer choque externo, mas tambem para poder prender-se, apoiar-se ou suspender-se nas superficies ou eixos, cuja pequena inclinação se deseja conhecer ou reduzir a determinadas condições.

Os niveis simples, que andam annexos ou ligados aos theodolitos de segunda e terceira classe, são revestidos com um tubo de latão (fig. 12) aberto na parte superior para deixar ver os movimentos da bolha. Nas extremidades so-

bresahem duas pequenas argolas a, a , que abrangem os parafusos verticaes p, p , fixos ao instrumento; e com as porcas annexas s, q, s', q' , pode proceder-se á rectificação do nivel como adeante veremos. Quando o oculo tem nivel preso, o que acontece nos theodolitos inglezes de segunda classe, além dos parafusos pp , existe outro em direcção horizontal que, juntamente com elles, serve para conseguir o perfeito parallelismo entre o nivel e o eixo do oculo, pois os dois primeiros não bastam para este fim. O mesmo se applica a outros casos.

Em alguns niveis dos theodolitos de terceira classe os parafusos p enroscam directamente nas peças do proprio instrumento (fig. 13), e os pequenos parafusos r correspondentes ao meio dos topos do tubo, apoiando-se nas ranhuras m das hastes d'aquelles, obrigam o nivel a acompanhar os movimentos verticaes das mesmas hastes.

Nos niveis mais perfeitos, munidos de gradação, o involucro costuma ser duplo: um abrange immediatamente o tubo de vidro; o outro envolve o primeiro, deixando, como é sabido, livre a parte superior. O tubo externo ou se liga ao instrumento por meio de parafusos, ou, sendo amovivel, está munido de pernas ou sustentaculos para poder apoiar-se ou suspender-se nos eixos, ficando superior ou inferior a elles. Os dois tubos metallicos estão ligados por parafusos de rectificação, verticaes e horizontaes, para que o tubo immediato ao vidro possa collocar-se por fôrma que a tangente á bolha de ar no ponto culminante da aresta superior seja parallelá á recta que liga os pontos médios dos apoios do tubo exterior.

O involucro metallico (de latão) se por um lado evita melhor alguns accidentes, por outro produz deseguaes dilatações que actuam mais ou menos sobre o nivel. Para evitar isto, quanto possivel, costuma o eximio artista M. Repsold dar aos seus niveis um involucro tambem de vidro (fig. 14 e 15). O tubo que contém a bolha de ar apoia-se n'uma travessa metallica t, t , por meio de dois anneis, nn , que o suspendem e cingem, havendo o cuidado de metter

entre elles e o vidro pequenos pedaços de cortiça, para amortecer a pressão. Exteriormente fica o nivel resguardado pela travessa inferior tt , pelos topos metallicos ee e pela cobertura cylindrica de vidro que o envolve.

As fig. 14 e 15 mostram de lado e de topo um nivel de Repsold, amovivel, para ser applicado sobre os munhões do eixo horizontal do theodolito.

$CKKC...$ representa um cavalete metallico cujas pernas podem apoiar-se directamente no eixo.

$a, a, r,$ e $s, s,$ (fig. 15) os parafusos para dar ao tubo do nivel differentes inclinações até conseguir-se que fique parallello ao eixo sobre o qual está collocado.

$MR...$ uma peça que, abrangendo pelo meio todo o systema, termina superiormente n'um cabo de madeira para as differentes manobras.

A fig. 16 representa outro nivel de Repsold, destinado a andar annexo ao circulo vertical do theodolito, formando systema com os microscopios micrometricos do mesmo circulo.

Vejamos agora as relações que existem entre a posição da bolha de ar, o zero ou origem das divisões do tubo e a differença de comprimento dos sustentaculos ou pernas do nivel, qualquer que seja o seu modo de ligação com o instrumento.

Sejam (fig. 17): VV o eixo proximamente vertical de todo o instrumento; $AB=a$, $CD=b$ as pernas ou sustentaculos do nivel; $BC=L$ o comprimento do tubo ou armadura em que o mesmo existe; AD o eixo em que o nivel assenta ou a que está ligado; BOC a linha culminante que a bolha de ar percorre; O a posição do zero ou origem da graduação; ZN e HH as direcções da vertical e do horizonte.

Suppomos rectos os angulos ABC e BCD , e que o ponto O , ou zero da graduação, occupa exactamente o meio da aresta circular BOC . Suppomos tambem ligados invariavelmente as linhas VV e AD , isto é, constantes as suas inclinações relativas.

Se fizermos variar a inclinação de AD ou (o que vem a

ser o mesmo) de VV , até que o meio da bolha de ar exista em O , estarão os pontos B e C á mesma altura, isto é, será BC paralela ao horizonte. N'estas circumstancias façamos girar todo o systema em volta do eixo VV até completar meia circumferencia; os pontos B, O, C , occuparão as posições symetricas B', O', C' .

Seja x o angulo de inclinação que $B'C'$ faz com o plano horizontal, teremos a altura de B' sobre este plano, representada por

$$a \cos x$$

visto ser $DB' = a$. Do mesmo modo teremos a altura de C' representada por

$$L \operatorname{tg} i + b \cos x,$$

sendo i o angulo de AD sobre o horizonte. Mas a differença de alturas dos pontos B' e C' é tambem dada por $L \sin x$; logo

$$L \sin x = L \operatorname{tg} i + b \cos x - a \cos x$$

ou

$$\sin x = \operatorname{tg} i + \frac{\cos x (b - a)}{L} \quad (1)$$

Porém considerando que

$$\operatorname{tg} i = \frac{b - a}{L},$$

teremos pela substituição em (1)

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} i \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x} \right)$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = \operatorname{tg} i$$

e portanto

$$x = 2i$$

Este mesmo resultado podia obter-se por simples considerações de geometria synthetica.

Logo: se com os parafusos do instrumento reduzirmos a bolha de ar ao meio da graduação do nivel e invertermos depois a posição d'este, o espaço percorrido pela bolha, da primeira posição para a segunda, representará o dobro da inclinação da linha recta que liga os pontos em que se apoia o mesmo nivel. Por isso, desfazendo metade do desvio com os parafusos rectificadores annexos ao tubo, e a outra metade com os parafusos do instrumento, ficará rectificado o nivel, n'esta parte, e horizontaes os apoios d'elle. Obtem-se este resultado depois de varias tentativas.

Sendo sempre muito pequeno o valor de x a equação (1) pode reduzir-se á seguinte:

$$x = i + \frac{b-a}{L} \quad (2)$$

a qual dá, em geral, o deslocamento da bolha, ou a inclinação da tangente ao ponto zero, em funcção da desigualdade dos sustentaculos do nivel e da inclinação da linha de apoio. E se chamarmos x' o novo deslocamento depois de invertido o nivel, será

$$x' = i - \frac{b-a}{L} \quad (3)$$

Sommando as duas equações antecedentes, temos

$$i = \frac{x+x'}{2}$$

e em partes do nivel expressas em segundos

$$(i)'' = \frac{x+x'}{2} \cdot \frac{206265}{\rho}$$

Vê-se pois que o angulo i em segundos é igual á média

dos desvios do centro da bolha de ar, tomados com o respectivo signal, a partir do zero da graduação nas duas posições oppostas do nivel, multiplicada pelo valor de uma divisão também expresso em segundos; e que este resultado é independente da differença $b - a$.

Se o nivel estiver rectificado, ou fôr $a = b$, teremos

$$x = x' = i,$$

isto é, não será necessaria inversão para obter a inclinação i ou $(i)''$.

Finalmente para $i = 0$, temos

$$x = + \left(\frac{b-a}{L} \right); \quad x' = - \left(\frac{b-a}{L} \right);$$

isto é, *quando o centro da bolha, ainda que fóra do zero, occupar sempre o mesmo lugar em relação a uma das extremidades do nivel, nas duas posições oppostas do tubo, temos a certeza de que é horizontal o eixo ou linha em que o mesmo se apoia.*

Consideremos agora o comprimento da bolha de ar, representando-o por 2λ ; supponhamos que o zero da graduação não está exactamente ao meio da linha culminante, approximando-se mais da extremidade B a quantidade y (fig. 17); e tomemos o caso geral de ter a linha BC uma certa inclinação x sobre o horizonte, estando B mais alto que C . Teremos as seguintes leituras:

$$B = \lambda - y + \rho x, \dots \text{ do lado de } B$$

$$C = \lambda + y - \rho x, \dots \text{ do lado de } C.$$

Invertendo o nivel, a extremidade B ficará mais baixa do que C , e teremos analogamente :

$$B' = \lambda - y - \rho x, \dots \text{ do lado de } B$$

$$C' = \lambda + y + \rho x, \dots \text{ do lado de } C.$$

Finalmente, entrando com os valores de x e x' tirados das equações (3) e (4), e fazendo, para abreviar,

$$\frac{b-a}{L} = q,$$

resultará:

$$B = \lambda + \rho i - (y - \rho q),$$

$$C = \lambda - \rho i + (y - \rho q),$$

$$B' = \lambda - \rho i - (y - \rho q),$$

$$C' = \lambda + \rho i + (y - \rho q),$$

e tambem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(B - C) &= \rho i - (y - \rho q) \\ \frac{1}{2}(B' - C') &= -\rho i - (y - \rho q) \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto a inclinação i expressa em segundos será

$$i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(B - C) - \frac{1}{2}(B' - C') \right\} \frac{206265}{\rho} \quad (5)$$

ficando simultaneamente eliminados os deslocamentos provenientes do erro do *zero* e da differença das pernas do nivel.

A formula (5) indica-nos o methodo de obtermos a inclinação do eixo em que assenta o nivel, tendo préviamente marcado as extremidades d'este para evitar enganos, e procedendo á leitura da graduação nos dois limites da bolha de ar, antes e depois de inverter-se o systema. O valor de ρ é sempre expresso em partes do nivel.

As formulas (4) dão (tambem em segundos)

$$\rho q - y = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(B - C) + \frac{1}{2}(B' - C') \right\} \frac{206265}{\rho};$$

portanto o nivel estará perfeitamente construido ou rectificado, n'esta parte de que tratamos, sendo

$$\rho q - y = 0,$$

o que terá logar quando fôr simultaneamente $q=0$ e $y=0$, ou quando $\rho q = y$.

Isto mostra que, ainda no caso de não estar bem central o zero da graduação, poderíamos sempre com os parafusos competentes obter a rectificação do nivel. Porém quando a bolha de ar é muito voluvel, nunca, ou quasi nunca, poderá praticamente conseguir-se esse estado, bastando uma rectificação approximada, e avaliando-se depois as pequenas inclinações pelo methodo rigoroso que fica exposto.

Se o zero estiver junto a uma das extremidades do tubo, corre a graduação toda seguidamente para a extremidade opposta. N'este caso, chamando: l_1 e l_2 as leituras dos limites da bolha; l_3 e l_4 as mesmas leituras depois de invertido o nivel; acharemos, tambem com facilidade, o valor da inclinação, ou

$$i = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(l_1 + l_2) - \frac{1}{2}(l_3 + l_4) \right\} \frac{206265}{\rho} \quad (5)'$$

E ainda que um tal caso menos vezes se dê na graduação dos niveis, não deixa esta, assim, de tornar-se comoda, por dar pouco logar a enganos de leitura.

Obtida, por qualquer modo que seja, a inclinação i , é quasi sempre necessario conhecer tambem o sentido d'ella para poder applicar-se a respectiva correcção. Torna-se facil este conhecimento, como a seu tempo veremos, attendendo ás posições relativas do theodolito e do nivel.

Os theodolitos trazem das mãos do artista os seus niveis graduados, e quasi sempre com a indicação do valor das suas divisões. Nunca o observador deve confiar plenamente n'estas indicações, mas sim, quando fôr necessario, estudar bem a marcha dos mesmos niveis e o valor angular das suas graduações, como adeante se verá.

5. Nonios.—O index da alidade não basta, como dis-

semos (n.º 1), para avaliar a grandeza dos angulos; serve só para indicar o numero das divisões do limbo, percorridas. Se as ultimas ou mais pequenas d'estas divisões representarem, por exemplo, 10 minutos cada uma, e se fôr g o numero inteiro de graus andados pela alidade, o index mostrará uma leitura de arco, que podêmos designar por

$$y = g + m 10' + x,$$

isto é, g graus, mais m vezes 10 minutos, mais um certo arco x ; n'este caso m só poderá variar entre 1 e 5. É necessario pois um aparelho por meio do qual se possa avaliar a grandeza x , tanto quanto possivel.

Sendo circular a escala, como no caso de que tratamos, o nonio compõe-se de um arco de circulo, movel em torno do centro do limbo, concentrico e juxtaposto a este, e dividido em partes eguaes entre si, e maiores ou menores que as da graduação.

Representemos por c a mais pequena divisão do limbo; tomemos n'este (fig. 18) o arco ou zona tt' , tal, que abranja um numero inteiro N de divisões c , e suppondo adjunto o arco ou zona movel MM , prolonguemos os traços extremos t e t' que devem concorrer no centro commum: ficarão marcados os limites VV' do nonio, em que $VV' = tt' = Nc$; e se dividirmos VV' em $N \pm s$ partes eguaes, teremos o mesmo nonio construido.

A divisão em $N + 1$ partes é quasi sempre usada, porém a theoria que vamos estabelecer pode tambem applicar-se ao caso de $N - 1$, mediante a simples inversão da origem do nonio, e até ao caso mais geral de $N \pm s$.

Suppondo, pois, $VV' = N + 1$, é certo que N divisões do limbo correspondem a $N + 1$ divisões de nonio. Seja w o valor de cada uma d'estas; se existir a coincidência de t com V , os traços $(t + c)$, $(t + 2c)$, $(t + 3c)$... $(t + nc)$ da graduação do limbo afastar-se-hão dos correspondentes w , $2w$, $3w$... nw , do nonio, as quantidades $(c - w)$, $2(c - w)$, $3(c - w)$... $n(c - w)$. Por isso, se o zero da alidade, ou

index, avançar $(c - w)$, o traço $(t + c)$ do limbo coincidirá com o traço w do nonio; se avançar $2(c - w)$, o traço $t + 2c$ coincidirá com $2w$, e assim successivamente. Em geral entre a divisão t do limbo, que ficar áquem do zero do nonio e os traços coincidentes, haverá um numero n de divisões c egual ao de divisões w entre os mesmos traços e a origem do nonio. Vê-se tambem que as coincidencias exactas só terão logar quando o deslocamento do index fôr egual a $c - w$ ou a um multiplo de $c - w$; porém como esta quantidade deve ser pequenissima em relação ás divisões do limbo e do nonio, é certo que, para qualquer deslocamento, existirá sempre em algum dos traços uma sensivel coincidencia.

Posto isto, continuemos a chamar y o arco do limbo percorrido, desde a origem, pela alidade que contém o nonio. Se o zero d'este coincidir com um traço d'aquelle, a indicação do index dará immediatamente o arco requerido; mas se tal não succeder, percorramos o nonio com a vista (geralmente armada de lupa) até achar os traços n da coincidencia: é evidente, segundo o exposto, que desde a origem da graduação do limbo até aos traços coincidentes decorre o arco

$$A = y + nw;$$

egualmente, se a contar da mesma origem, representarmos por L a leitura do arco indicado pelo traço do limbo, que precede immediatamente o zero do nonio, teremos tambem

$$A = L + nc.$$

Logo

$$y + nw = L + nc;$$

d'onde resulta

$$y = L + n(c - w) \quad (6)$$

Isto é, o arco mostrado pelo index será egual ao lido directamente no limbo mais a differença entre a minima divi-

são d'este e a do nonio, multiplicada pelo numero de divisões decorridas desde o zero do nonio até ao traço da coincidência.

Para conhecer-se mais facilmente a natureza do nonio, convém exprimir w em c , o que se consegue pela seguinte egualdade

$$Nc = (N + 1)w,$$

da qual se tira

$$w = \frac{N}{N+1}c;$$

e por conseguinte será

$$y = L + n \frac{c}{N+1} \quad (7)$$

Esta equação, identica a (6), diz-nos que a leitura ou indicação do nonio, que deve accrescentar-se á leitura directa L do limbo, é igual ao numero n de divisões lidas no mesmo nonio desde a sua origem até ao traço da coincidência, representando cada uma $\frac{1}{N+1}$ da minima divisão do limbo.

Comparando as formulas (6) e (7) achamos immediatamente

$$c - w = \frac{c}{N+1}; \quad (8)$$

isto é, a natureza ou sensibilidade do nonio é representada por uma quantidade equal ao valor da minima divisão do limbo dividido pelo numero de divisões do nonio. Seja

$$c = 10' = 600'', \quad N + 1 = 60,$$

teremos

$$c - w = 10''$$

N'este caso costuma dizer-se que o nonio é de 10 segundos. E assim nos outros, *mutatis mutandis*.

A equação (8) mostra que a sensibilidade ou approximação do nonio augmenta com a diminuição de c ou o crescimento de N . Mas na pratica são estreitos os limites, porque, attendendo á grandeza dos limbos dos theodolitos, um valor de $c - w$ muito pequeno produzirá incertezas na apreciação da maior coincidência dos traços, apesar do emprego da lupa, parecendo que, n'um certo espaço, todas as divisões do nonio e do limbo se confundem. Comtudo, mesmo no caso de $c - w$ não ser muito pequeno, se o avanço do index além de uma divisão do limbo fôr $\frac{1}{2}(c - w)$ ou um multiplo d'esta quantidade, acontecerá que as coincidencias mais rigorosas terão logar igualmente em dois traços seguidos um ao outro; deve então tomar-se a média das leituras; e d'aqui vem o dizer-se que n'um nonio bem construido, cuja sensibilidade seja $c - w$, podemos por estimativa levar a approximação das leituras até $\frac{1}{2}(c - w)$.

A mesma equação (8) dá

$$N = \frac{c}{c - w} - 1,$$

ou, o numero N das divisões minimas do limbo que devem ser abrangidas pelo nonio para este satisfazer a determinadas condições. Assim, quando a divisão minima c fôr de $10' = 600''$, e quizermos que a sensibilidade $c - w$ seja de 10 segundos, teremos

$$N = \frac{600}{10} - 1 = 59.$$

É este o caso dos theodolitos inglezes de segunda classe.

Se o numero das divisões do nonio fosse $N - 1$ em vez de $N + 1$, teriamos

$$Nc = (N - 1)w;$$

e por isso, empregando um raciocinio analogo ao da hypothese de $N+1$, resultaria

$$y = L - n \frac{c}{N-1}$$

$$c - w = \frac{c}{N-1}$$

que representam os mesmos casos das equações (7) e (8) com a differença de dever estar o zero do nonio na extremidade opposta áquella que temos considerado, sendo por isso as leituras d'este, feitas em sentido contrario ao da graduação.

Poderíamos tambem considerar o caso mais geral de serem $N \pm s$ as divisões do nonio, porém visto que isso nenhuma difficuldade offerece, abstenho-nos de o fazer por desnecessario, e mesmo por ser a divisão $N+1$ quasi exclusivamente adoptada.

Para tornar mais facéis as leituras costuma o nonio ter indicados os minutos por meio de traços mais compridos com a competente graduação.

Nos limbos verticaes de alguns theodolitos inglezes de segunda classe, em que a origem da graduação occupa, como dissemos (n.º 2), a parte inferior do semicirculo, costuma o nonio ser duplo, isto é, ter o arco de $2(N+1)$ divisões, correspondentes a $2N$ do limbo, e o zero ao meio, seguindo para cada lado um nonio de igual natureza. Esta duplicação pode dispensar-se, pois é sufficiente um unico nonio com a numeração inscripta em dois sentidos oppostos.

Tudo quanto temos dito ácerca dos nonios circulares deve applicar-se ao caso de serem rectilineos.

6. Microscopios micrometricos.—A incerteza das leituras do nonio além de certos limites assás estreitos, fez com que nos instrumentos de medir angulos com alta precisão se procurasse outro meio de avaliar as fracções das

ultimas divisões dos circulos graduados. Recorreu-se, pois, ao machinismo chamado *microscopio micrometrico*, que se funda n'um principio differente.

Imaginemos um microscopio com o eixo optico sempre normal á superficie sobre que estão gravadas as divisões do limbo e tendo no plano focal um reticulo. Para maior simplicidade consideremos, por ora, n'este um só fio, cuja projecção no limbo deve confundir-se com o raio gerador da superficie, isto é, concorrer para o centro d'ella. Se o microscopio estiver fixo, e dermos ao limbo o movimento de rotação em torno do eixo central, a imagem de cada um dos traços da graduação virá successivamente coincidir com o fio. O mesmo acontece sendo fixo o limbo e movel o microscopio em torno do referido eixo, com tanto que se conserve na posição normal que indicamos.

Quando, feita a pontaria com o oculo do theodolito, fixarmos o seu movimento, que arrasta comsigo o microscopio ou o limbo, o fio do reticulo do microscopio projectar-se-ha, ou exactamente sobre um dos traços da graduação, ou no intervallo d'elles. No primeiro caso teremos a rigorosa medida do angulo decorrido, lendo-se a indicação do traço coincidente; no segundo, é necessario determinar a posição da linha ideal do circulo, cuja imagem coincida com a posição do fio, isto é, conhecer o intervallo entre a projecção d'este no limbo e um dos traços mais proximos.

Para este fim substituamos ao fio fixo um ponto bem distincto, invariavelmente ligado com o tubo do microscopio, para representar o *zero*¹, e sujeitemos o bastidor do reticulo a mover-se no plano focal e perpendicularmente á direcção dos traços do limbo por meio de um parafuso munido de tambor graduado com index tambem fixo: teremos o micrometro, o qual junto com o systema optico, constitue o microscopio micrometrico que nos dará a apreciação

¹ O mesmo fio fixo poderia servir de zero, micrometrico, mas prefere-se um pequeno orificio collocado lateralmente, por não embaraçar o campo central do microscopio.

requerida. Com effeito: consideremos no reticulo movel um fio occupando o logar do primeiro que suppozemos fixo; n'esta posição concidirá com o zero do micrometro, e o index do tambor deverá tambem marcar zero na graduação d'este. Se não marcar, facilmente se reduzirá a isso, como veremos. Movamos depois o parafuso micrometrico até que o fio, seguindo em sentido contrario á graduação numerica do limbo, vá projectar-se sobre o traço d'este, mais proximo, cuja indicação designaremos por L ; será o arco y , correspondente ao zero do micrometro, dado pela seguinte expressão

$$y = L + M,$$

na qual M representa a leitura micrometrica.

Achemos agora M em função das voltas e divisões do tambor, suppondo que M , e por isso o parafuso annexo, faz um numero inteiro N d'essas voltas ou revoluções para mover o fio, desde um traço do limbo do instrumento até ao traço immediato. Seja d o valor da minima divisão do mesmo limbo e v o de uma revolução do tambor, teremos

$$v = \frac{d}{N}.$$

Egualmente, sendo m o numero total das divisões do tambor e δ o seu valor, teremos

$$\delta = \frac{v}{m}.$$

E se representarmos por n o numero de voltas inteiras do parafuso para conduzir o fio movel desde o zero do micrometro até ao traço do limbo, que immediatamente o precede, e por l o numero de divisões lidas no tambor, cuja numeração suppomos seguir em sentido contrario ao do movimento d'elle, será

$$M = nv + l\delta$$

e por tanto

$$y = L + nv + l\delta \quad (9)$$

Logo, a posição do zero do micrometro será dada pela leitura directa do limbo, mais um certo numero de revoluções e divisões do tambor expressas em arco.

Se em vez de compararmos com o traço precedente á posição do zero do micrometro, a referissemos ao traço que o segue no limbo, e que podemos representar por $(L + Nv)$, teriamos

$$y = (L + Nv) - M'$$

ou, por considerações analogas ás anteriores,

$$y = (L + Nv) - \{ n'v + (v - l'\delta) \} \quad (10)$$

N'este caso, pois, a posição do zero será dada pela leitura do limbo no traço que se segue ao mesmo zero, menos a leitura micrometrica, a qual comprehende um certo numero inteiro n' de revoluções do tambor mais o complemento da indicação d'este em relação a uma volta.

O valor de n' é igual a $(N - n - 1)$, como facilmente se vê; por isso, feita a substituição na equação (10) e reduzindo, será

$$y = L + nv + l'\delta;$$

e sommando esta com (9), temos

$$y = L + nv + \frac{l+l'}{2}\delta \quad (11)$$

Logo: quando para a determinação da posição do traço ideal do limbo, correspondente ao zero do micrometro, quizermos fazer concorrer as duas leituras do tambor relativas ás coincidencias da projecção do fio movel sobre dois traços immediatos da graduação, basta accrescentar á leitura do traço, que precede o zero micrometrico, o numero de revoluções de-

corridas entre este e o dito traço, mais a média das indicações do tambor, tomadas ambas no sentido da sua numeração, nas duas coincidências. Esta regra evita enganos, quando assim procedermos.

Se o micrometro fosse perfeito e bem rectificado, e as coincidências exactas, teríamos sempre $l=l'$, bastando por isso uma só leitura ou ajustamento, mas este caso quasi nunca se dá na pratica, havendo quasi sempre alguma differença entre l e l' , que em todo o caso deve ser pequena. Por isso não será perdido o tempo gasto nas duas coincidências, as quaes, pelo menos, fornecem uma verificação.

Sendo rectilíneo, como é, o caminho percorrido por um ponto qualquer do fio movel, é evidente que os deslocamentos dados pelo micrometro não são proporcionaes aos arcos, e por isso o principio em que se funda a applicação d'este apparelho aos casos de que tratamos, só é rigoroso em quanto a corda e o arco possam julgar-se eguaes, hypothese admissivel nas pequenas divisões dos limbos. Assim, nos maiores theodolitos de Repsold acha-se $d=4'$, $N=2$ e $m=60$; logo $v=2'$ e $\delta=2''$. Nos theodolitos de primeira classe de Troughton, é $d=5'$, $N=5$ e $m=60$; logo $v=1'$ e $\delta=1''$. Nos theodolitos menores, de Repsold, costuma ser $d=10'$, $N=3$ e $m=100$; logo $v=3' 20''$ e $\delta=2''$.¹

Parece que, para uma dada divisão d do limbo, poderia augmentar-se muito a sensibilidade do micrometro, concedendo a N um grande valor; mas isto não é rigoroso na pratica, pois, por um lado, tendo de empregar-se maior numero de roscas e mais finas, do parafuso micrometrico, devem multiplicar-se as suas inevitaveis irregularidades, e por outro lado, qualquer variação inapreciavel, na coincidência do fio com o traço, fará alterar consideravelmente

¹ O valor de uma divisão do tambor do micrometro nunca dá exactamente um numero inteiro de segundos, mas pode approximar-se d'elle quasi por completo, restando uma pequenissima differença de que trataremos quando fallarmos dos erros micrometricos.

a leitura das indicações do tambor. Ainda assim, nos limbos cuja minima divisão não seja superior a 5 minutos, e com parafusos bem acabados, pode contar-se com a aproximação *real* de um segundo em cada leitura, se houver as cautelas e atenções necessarias.

Temos até aqui supposto no micrometro um só fio, mas em vez d'este existem geralmente dois parallellos mui proximos (fig. 19), podendo addiccionar-se-lhes um ou dois transversaes para regular a posição do tubo do microscopio. Os traços grossos designam a graduação do limbo, z o orificio indicativo do zero collocado no pente p , cujos dentes equivalem, cada um, a uma revolução do tambor. São assim os micrometros dos instrumentos de Repsold. Nos de Troughton os fios moveis são encruzados obliquamente (fig. 20), e existe um pequeno ponteiro t de platina para indicar os dentes decorridos, isto é, as voltas do tambor.

Um só fio tornaria o reticulo defeituoso, porque logo que se projectasse sobre qualquer traço da graduação haveria no ajustamento uma incerteza quasi equivalente á grossura apparente do mesmo traço, erro consideravel por causa da grande amplificação do microscopio. Os dois fios obliquos da fig. 20, systema de Pond, com quanto satisfaçam ao seu fim, não permitem um tão rigoroso ajustamento como os dois fios parallellos da fig. 19, systema de Encke. N'este caso, o traço da graduação pode ficar comprehendido parallello e symetricamente pelos fios, sendo mais facil de verificar a exacta symetria dos espaços lateraes. É por isso que o systema de Encke está sendo adoptado geralmente por eximios artistas, como Repsold, etc.

O machinismo locomotor do reticulo consta essencialmente (fig. 21) de um bastidor ou caixilho BB movel ao longo das varetas cylindricas VV , em cada uma das quaes enrosca uma mola em espiral para exercer pressão no parafuso Pp que faz mover o caixilho. N'este, existe um orificio que contém o reticulo. O tambor T , movendo-se com o parafuso em torno do seu eixo commum Pp faz passar a propria graduação em frente de um index fixo á caixa

exterior *CC*. A fig. 22 mostra em menor escala a fôrma geral do microscopio micrometrico. *OS* representa o tubo, *CC* a caixa exterior, *P* a cabeça do parafuso, *T* o tambor, *i* o index. Junto á objectiva *S* costuma existir um pequeno reflectidor para, por meio d'elle, se illuminarem melhor as divisões do limbo.

A collocação dos microscopios micrometricos está sujeita, como vimos, a certas condições:

1.^a *O movimento dos fios deve ser em sentido perpendicular á direcção dos traços da graduação do limbo.* Para conseguir-se isto basta desandar todo o microscopio em torno do seu eixo.

2.^a *O eixo do microscopio deve ser normal á superficie em que está gravada a graduação.* Este requisito pode julgar-se sufficientemente satisfeito quando a imagem de um traço da graduação conserva a mesma clareza nas extremidades lateraes do campo do microscopio; e se assim não acontecer, faz-se a rectificação com os parafusos que prendem o tubo ao suporte.

3.^a *O index do tambor deve corresponder ao zero da graduação d'este, quando os fios moveis estiverem no zero do micrometro.* Consegue-se isto fixando entre os dedos a cabeça do parafuso e deslocando com a outra mão o tambor, que é susceptivel, com pequeno esforço, de um movimento giratorio, independente. Basta uma rectificação approximada.

4.^a *Um numero inteiro de voltas ou revoluções do parafuso deve ser equivalente á distancia apparente de dois traços consecutivos do limbo.* Para obter esta condicção augmenta-se ou diminue-se a distancia entre a ocular e a objectiva do microscopio; faz-se assim variar a imagem do intervallo dos traços do circulo, podendo tornar-se egual ao comprimento que os fios percorrem com um numero inteiro de voltas. Se ha excesso, diminue-se a referida distancia, se ha falta, isto é, passando os fios de uma a outra divisão, sem ficar bem completo o numero de voltas, pratica-se o contrario. Cumpre comtudo advertir que qualquer d'estas

operações obriga a imagem da gradação a sahir do plano em que se movem os fios, sendo necessario approximar ou afastar do limbo todo o microscopio até se restabelecer a perfeita visibilidade dos traços pela coincidencia do plano focal com o do reticulo. Esta rectificação nunca poderá fazer-se completamente, havendo quasi sempre necessidade de calcular os desvios micrometricos por meio de taboas especiaes, como adeante se verá.

II

Erros instrumentaes e modo de corrigir, eliminar ou atenuar os seus effeitos na medição dos angulos

7. Enumeração dos principaes erros no theodolito.—A falta de rigidez absoluta nos metaes e a inevitavel imperfeição do artista no acabamento completo e disposição exacta das differentes peças do instrumento, dão origem, na medição dos angulos, a diversos erros, cuja natureza é necessario investigar, para destruir, quanto possivel os seus effeitos.

Quando se procede ás observações para a determinação directa de qualquer grandeza physica, os erros que apparecem podem reduzir-se a duas classes; uns *fortuitos* ou irregulares, outros regulares ou *systematicos*. Os primeiros derivam principalmente da imperfeição dos nossos orgãos e de causas externas, *variaveis em sentidos contrarios*, como o tremor das mãos, a trepidação do ar, etc. Os segundos tendem a reproduzir-se no mesmo sentido e de um modo constante, sendo dadas circumstancias identicas.

Não trataremos agora da primeira classe de erros, que, fugindo ao calculo regular e não podendo eliminar-se, são, todavia, susceptíveis de uma attenuação progressiva, augmentando-se o numero de observações e combinando-se habilmente os seus resultados. Ao observador compete, sobretudo, a investigação dos segundos (ou erros systematicos) e é d'estes que especialmente nos vamos occupar em seguida.

Continuando a suppor no theodolito fórmulas geometricas exactas, trataremos de fazer a comparação entre o instrumento assim theoreticamente concebido e o que, na realidade, sae das mãos do constructor. D'esta comparação, se fôr dirigida com methodo, deriva uma serie de principios e regras tendentes a approximar o theodolito do seu ideal mathematico, obtendo-se, ou a eliminação da influencia dos seus defeitos, ou o conhecimento directo de seus erros.

Uma das coisas que primeiro deve chamar a attenção do observador é o oculo. Ninguem pode medir bem sem ver distinctamente. Contudo a força do oculo n'um theodolito constitue, por assim dizer, um facto immutavel; tem de acceitar-se tal como existe, salvo se valer a pena ou fôr indispensavel a sua substituição. Mas se a *força penetrativa* dos grandes telescopios, voltados para o céu, faz logo sentir bem claramente ao homem a impotencia dos seus esforços, quando quer estender a vista além de certos limites n'aquellas immensas regiões, é tambem mui restricto em relação aos objectos terrestres o que podemos esperar do oculo de um instrumento portatil, cujas dimensões são, de necessidade, pequenas.

Acceitos, pois, forçosamente os limites prescriptos pelos recursos e condições da pratica, cumpre só examinar se as lentes estão bem limpas e collocadas, e se esta parte do instrumento está em harmonia com as dimensões d'elle e com o fim a que é especialmente destinado. Abstrahindo-se da boa collocação do reticulo, os oculos propriamente ditos não requerem, em geral, da parte do observador outras rectificações além das já indicadas (n.º 3) para obter-se o

melhor grau de visibilidade que por meio d'elles poder alcançar-se.

A graduação dos limbos e dos niveis e as condições dos nonios e microscopios micrometricos, exigem attenções especiaes. Por maior cuidado que empregue o artista, sempre escapam erros ligeiros, tanto no traçado das divisões, como no acabamento das roscas dos parafusos micrometricos; além d'isto, é necessario attender á excentricidade dos limbos.

A torção e as reacções dos parafusos ajustantes tambem influem desvantajosamente na exacta medição dos angulos, e por isso convém contrariar, quanto possivel, os seus efeitos.

A flexão do oculo, devida ao peso da objectiva, posto que seja quasi insensivel, mesmo nos maiores instrumentos portateis, deverá ser calculada em certos casos da pratica para corrigir-se o valor de alguns angulos verticaes ou para nos certificarmos da grandeza da sua influencia.

Finalmente os eixos e os limbos graduados, afastando-se das suas posições normaes, ainda que pouco seja, dão origem com esses desvios a variados erros, alguns dos quaes são de grande importancia na pratica. Effectivamente: a maior ou menor excentricidade do oculo; a falta de perpendicularismo completo entre os eixos fundamentaes e os respectivos limbos e d'aquelles entre si; a inclinação do circulo de azimuths a respeito do horizonte verdadeiro, e do eixo optico do oculo em relação ao circulo de alturas, são outras tantas causas de erros que nem sempre basta reduzir com os parafusos rectificadores. Por maior cuidado que haja, resultarão desvios cuja influencia, em muitos casos, é necessario destruir; sendo até quasi sempre mais seguro na pratica, segundo a natureza do theodolito, não levar as rectificações a grande apuro, mas corrigir os pequenos erros systematicos, ou directamente por calculo, ou indirectamente, eliminando-os com observações *encruzadas*, isto é, combinadas duas a duas e invertendo entre cada uma a parte movel do instrumento.

Entremos em especialidades.

8. Defeitos na graduação dos limbos.— Julgamos desnecessario tratar aqui da descripção das machinas de dividir os circulos e dos processos empregados para obter a mais ou menos miuda graduação d'elles. Em quasi todos os limbos graduados descobrem-se geralmente duas sortes de erros: uns particulares a cada traço e independentes entre si, que podem chamar-se *accidentaes*; outros reproduzindo-se ordenadamente, isto é, *periodicos*. Todos elles necessitam de ser eliminados ou reduzidos.

Prescindiremos dos delicados processos que os astrónomos empregam para obter um conhecimento, quanto possível exacto, da graduação dos limbos. Nos theodolitos, os pequenos erros de graduação são atenuados pelo methodo de observar, como veremos. Comtudo, sempre convirá proceder-se a algum exame, para nos certificarmos se os limbos estão isentos de imperfeições inadmissiveis.

Os erros de divisão obteem-se pela comparação successiva de intervallos que sejam partes aliquotas da circumferencia. Supponhamos que se quer fazer a verificação de g em g graus. Colloca-se horizontalmente o limbo n'um appoio bem firme e por modo que aquelle possa girar com suavidade em torno do seu centro; estabelecem-se, em sentido normal á superficie graduada e com egual estabilidade, dois microscopios micrometricos distanciados tambem de g graus proximamente; depois, por um movimento de rotação do circulo, ajustar-se-ha com o primeiro microscopio o traço 0° do limbo, e por meio do parafuso do segundo medir-se-ha a distancia que separa este do zero, distancia que será egual a $g \pm t_1$, representando t_1 a leitura do tambor do micrometro. Feito isto, conduz-se a divisão g a coincidir com o mesmo primeiro microscopio, e avalia-se no segundo $2g \pm t_2$. E assim successivamente até voltar ao traço 0° . Pratica-se o mesmo andando com o limbo em sentido contrario. Ora, sendo n o numero de intervallos medidos, quer n'uma ou n'outra operação, teremos as seguintes leituras:

1.^a operação... $g \pm t_1, 2g \pm t_2, 3g \pm t_3, \dots (n-1)g \pm t_{n-1}$;

2.^o operação... $g \pm t'_1, 2g \pm t'_2, 3g \pm t'_3, \dots (n-1)g \pm t'_{n-1}$;

e tomando as médias das leituras successivas dos micrometros n'um e n'outro sentido, ou

$$\theta_1 = \frac{t_1 + t'_1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{t_2 + t'_2}{2}, \quad \theta_3 = \frac{t_3 + t'_3}{2}, \quad \text{etc.},$$

virá

$$g \pm \theta_1, \quad 2g \pm \theta_2, \quad 3g \pm \theta_3, \dots (n-1)g \pm \theta_{n-1}$$

Chamando agora θ_0 a média arithmetica dos valores de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, etc., os erros dos traços successivos serão:

$$\theta_0 - \theta_1 = \delta_1 \text{ no traço } g;$$

$$2\theta_0 - \theta_1 - \theta_2 = \delta_2 \text{ no traço } 2g;$$

$$3\theta_0 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \delta_3 \text{ no traço } 3g;$$

.....

$$(n-1)\theta_0 - \theta_1 - \theta_2 - \dots - \theta_{n-1} = \delta_{n-1} \text{ no traço } (n-1)g$$

Para facilitar as operações, costuma dar-se a g um valor bastante consideravel, por exemplo 10 graus, e depois de haver-se determinado o erro de cada divisão multipla de 10, tomam-se estes traços como pontos de partida e estudam-se parcialmente os que ficam nos intervallos.

Querendo fazer-se uma idéa, ainda que menos rigorosa, do estado da graduação do limbo de azimuths, podem escolher-se no *horizonte* da estação, e a pequena distancia do theodolito bem rectificado, dois pontos distinctos, inabalaveis e apartados um do outro por fórma que correspondam proximamente ao arco g do circulo graduado. Depois, com o oculo do instrumento, dirige-se a pontaria a um dos pontos, collocando o zero do limbo em proxima coincidência

com qualquer dos seus proprios microscopios ou nonios; faz-se a leitura do arco, igual a $0^\circ \pm l$, sendo l a média obtida por dois nonios ou microscopios micrometricos opostos; em seguida dirige-se o oculo ao segundo ponto e faz-se do mesmo modo a leitura, que será igual a $g \pm l'$. Teremos

$$(g \pm l') - (0^\circ \pm l) = g \pm \theta_1$$

Empregando um methodo analogo a partir proximamente dos traços g , $2g$, $3g$, etc., chegaremos ás proximidades do traço que marca 180° , e obter-se-ha a serie de valores angulares: $(g \pm \theta_1)$, $(g \pm \theta_2)$, $(g \pm \theta_3)$, etc., cuja média arithmetica, comparada com cada um dos valores simples, dará uma serie de differenças, as quaes devem representar os erros da graduação, pondo de parte os defeitos que o mesmo processo envolve. Estes defeitos consistem sobretudo na imperfeição das pontarias e das leituras, pois, estando os pontos de mira no horizonte, podemos abstrahir dos outros desvios instrumentaes que só produzirão erros quasi inapreciaveis, como adeante veremos.

Se o limbo de alturas girar independentemente do oculo, bastará, do mesmo modo, proceder ao seu exame, escolhendo dois pontos tambem proximos, mas desviados da quantidade g no sentido vertical e existentes no mesmo plano do instrumento.

A necessidade do emprego dos dois nonios ou microscopios para evitar a excentricidade do limbo, de cujo valor fallaremos, faz com que os erros achados por este processo se refiram a dois traços oppostos de 180° e não a cada traço isolado. É isto um defeito, pois fica-se em duvida sobre qual dos dois traços recáe o erro, ou se o abrangem ambos. Comtudo, apezar d'este e dos outros inconvenientes citados, é um tal methodo o que melhor se presta á execução, por não depender deapparelhos extranhos ao instrumento, dando uma idéa bastante approximada do grau de rigor da graduação dos limbos: deve pois, á falta d'outro melhor, ser empregado pelos observadores.

Fallámos em erros *periodicos* e *accidentaes*. Os processos para o conhecimento de uns e outros são essencialmente os mesmos, e uns e outros vão sendo igualmente determinados. Comtudo advertiremos que os erros periodicos derivam dos traços principaes (graus e meios graus), que representam a divisãc fundamental a que é costume subordinar a graduação miuda. Se quizessemos discutir minuciosamente esta questão, seria necessario entrar nos methods que os artistas empregam em dividir os circulos; mas, como dissemos, prescindimos d'esse estudo por ser superfluo para o nosso fim.

9. Defeitos na graduação dos niveis.—Já vimos (n.º 4) como se examinavam os tubos dos niveis e como se procedia á sua divisão por meio do zygometro. Porém, quando qualquer observador toma conta de um theodolito com os niveis graduados, nem sempre saberá o valor das divisões ou terá inteira confiança no que lhe fôr ministrado. Além d'isto, o constructor costuma graduar os tubos antes de lhes applicar o resguardo ou revestimento metallico, e esta manobra pode alteral-os, ainda que levemente. É portanto quasi sempre necessario proceder-se a novo exame dos niveis, não só para o conhecimento do valor angular das suas divisões, em qualquer temperatura, mas tambem para haver certeza da regularidade da aresta culminante em que são traçadas.

Se o observador tiver á sua disposição um zygometro, procederá conforme fica dito em o n.º 4. Mas se não possuir este instrumento, deve soccorrer-se de outros meios. Um dos mais simples consiste em empregar o proprio theodolito, como vamos indicar.

Prende-se parallelamente e firmemente o nivel por qualquer meio ao vertical do instrumento, cujos munhões suppomos bem nivelados. Gira-se com aquelle circulo até que a bolha de ar, sempre livre, se approxime de uma das extremidades do tubo sem passar fóra da sua graduação. N'este estado faz-se a leitura y_1 do arco do limbo e as leituras B

e C das extremidades da bolha. O desvio d'este, a partir do zero do tubo, será representado (n^o 4) por

$$n = \frac{B - C}{2} \quad \text{ou} \quad n = \frac{B + C}{2}$$

conforme o zero está ao meio ou no extremo do tubo; e chamando w o valor angular de cada parte do nivel, teremos a seguinte equação

$$y_1 = A + n_1 w \quad (12)$$

na qual A representa a leitura do limbo, quando $n_1 = 0$. O valor de A pode julgar-se constante no decurso de uma serie de observações; e se empregassemos o zygometro, subsistiria a mesma equação, como é evidente, sendo n'esse caso y_1 a leitura do circulo zygométrico.

Para os successivos¹ valores de y teriamos as successivas equações:

$$\left. \begin{array}{l} y_2 = A + n_2 w \\ y_3 = A + n_3 w \\ \dots\dots\dots \\ y_m = A + n_m w \end{array} \right\} \quad (12 a)$$

Sommando termo a termo todas estas equações, dividindo a somma pelo numero m das mesmas, subtrahindo a média, membro a membro, de cada uma d'ellas, e considerando todas as differenças como positivas, resultarão outras tantas m equações da seguinte fórma, em que fica eli-

¹ Os successivos valores de y costumam ter differenças constantes; isto é, $y_2 = y_1 + h$, $y_3 = y_1 + 2h$, $y_4 = y_1 + 3h$, etc.; porém isto não é necessario ou indispensavel. Tratamos a questão na sua maior generalidade.

minado A ; a saber:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= k_1 w \\ p_2 &= k_2 w \\ p_3 &= k_3 w \\ &\dots\dots\dots \\ p_m &= k_m w \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

de cuja combinação sahirá o valor de w .

As equações (13) em que existe a unica incognita w prestam-se muito facilmente ao *methodo dos menores quadrad-*
dos; por isso, applicando-lhe este, teremos o valor mais
provavel de w , ou

$$w = \frac{[p k]}{[k^2]} \quad (14)$$

aonde $[p k] = p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3 + \dots p_m k_m$, $[k^2] = k_1^2 +$
 $+ k_2^2 + k_3^2 + \dots k_m^2$, conforme a notação geralmente em
uso¹.

O valor de w tirado da equação (14) e introduzido nas
(13) não satisfará completamente a estas, resultando:

$$p_1 - k_1 w = \Delta_1$$

$$p_2 - k_2 w = \Delta_2$$

$$p_3 - k_3 w = \Delta_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_m - k_m w = \Delta_m$$

¹ O methodo dos menores quadrados é hoje continuamente appli-
cado na pratica da astronomia e geodesia. O seu uso torna-se laborioso
quando existem muitas incognitas, por causa da longa eliminação d'el-
las. Entendemos, porém, não ser necessario deduzir aqui as formulas
geraes d'este cálculo, que pode estudar-se com toda a profundeza nas
Memorias de M. Gauss e em outros livros.

Estes *resíduos* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_m$, se forem muito pequenos e não seguirem alguma lei progressiva, devem ser imputados aos erros de observação e demonstram a perfeição do nível e das suas divisões.

Quando a graduação do tubo é em duas secções para um e outro lado, tendo ao meio um intervallo isento de traços, como acontece em geral, pode convir mais examinar separadamente cada uma das secções pela leitura de uma só extremidade da bolha (a que fica voltada para a secção que se examina); este processo tornar-se-ha indispensavel todas as vezes que quizermos extender o estudo a todas as divisões do tubo, porque de outro modo haveria casos em que uma das extremidades da bolha cahisse no espaço central não graduado. Se fôr, pois, indispensavel este processo, a marcha a seguir no cálculo é a mesma que anteriormente indicamos, sendo então $n=B$ ou C ; e, obtendo-se dois grupos da equação (12), de que resultarão dois valores de w , cuja média tomaremos, podemos conhecer se o tubo do nível está igualmente bem calibrado nas duas secções graduadas.

Cumpre-nos comtudo advertir que, devendo os níveis do instrumento estar proximamente rectificados no acto das observações, quasi nunca os limites da bolha chegarão ás divisões extremas, e por isso bastará que a maior uniformidade se manifeste no espaço geralmente em uso, podendo tolerar-se algumas anomalias de graduação nos traços finaes.

É costume no exame dos níveis fazer diversas series de observações, devendo mover-se a bolha n'um sentido e depois em sentido contrario. Variando as circumstancias, deve tambem variar o valor de A da equação (12), e por isso obteremos tantos grupos de equações quantas as series; isto é:

$$1.^{\circ} \text{ grupo} \quad y_1 = A + k_1 w$$

$$y_2 = A + k_2 w$$

etc.

$$2.^{\circ} \text{ grupo} \quad y'_1 = A' + k'_1 w$$

$$y'_2 = A' + k'_2 w$$

etc.

E assim por deante. O methodo dos menores quadrados pode applicar-se a todas estas equações simultaneamente, deduzindo-se das condições do *minimum* os valores de A , A' , A'' , etc. e finalmente o de w ; porém julgamos sufficiente applical-o separadamente a cada um dos grupos, deduzindo pela equação (14) tantos valores de w quantos forem os mesmos grupos e tomando depois a média. Este processo muito mais simples, porque nos livra de maiores calculos, dará essencialmente o mesmo resultado; e muito mais deve empregar-se, lembrando-nos de que, tendo mostrado a experiencia que não é inteiramente constante a curvatura do tubo do nivel, será necessario repetir o exame, passado algum tempo (um anno por exemplo). Ora o repetir periodicamente um calculo extenso, sem vantagem real, segundo julgamos, será trabalho que bem pode dispensar-se.

Uma cousa que deve merecer a attenção do observador é a variação de w em virtude da mudança de temperatura. É necessario examinar se essa variação se manifesta. Ora, chamando W o valor angular de uma parte do tubo do nivel á temperatura T , o mesmo valor w a qualquer temperatura t , será dado pela seguinte equação

$$w = W + F(t - T). \quad (15)$$

F é uma constante cuja determinação se obtem por meio de numerosas observações feitas a muito differentes temperaturas. O methodo dos menores quadrados pode ser aqui tambem utilmente empregado, combinando um grande numero d'estas equações.

Quando o nivel está fixo ao porta-microscopios ou portanonios do circulo vertical do theodolito, costumam obter-se as equações (12 α) pela fórmula seguinte. Colloca-se o oculo

na direcção de um dos tres parafusos nivelantes inferiores, por fórma que a projecção do seu eixo optico seja proximamente perpendicular á recta que liga os outros dois parafusos; aponta-se sobre um objecto terrestre bem distincto e não muito afastado para se evitarem os effeitos da refacção; fazem-se as leituras y_1 do limbo e k_1 do nivel. Em seguida, por meio do dito parafuso inferior, muda-se a inclinação do oculo em relação ao objecto externo, e, feita nova pontaria, lê-se de novo o arco vertical e a indicação do nivel, isto é, obtem-se y_2 e k_2 . E assim successivamente até se alcançar uma ou mais series de equações (12), cuja resolução indicámos.

Ainda que a doutrina exposta seja facil de comprehender-se, daremos dois exemplos breves para maior clareza nas applicações.

Supponhamos que, em serie successiva, obtinhamos os seguintes dados colhidos no limbo vertical do theodolito, por meio de leituras do micrometro, e do nivel, á simples vista:

LIMBO	NIVEL
14°. 10'. 65 ^p ...	2,6
14 . 10 . 60 ...	5,1
14 . 10 . 55 ...	7,8
14 . 10 . 50 ...	10,5
14 . 10 . 45 ...	12,9
14 . 10 . 40 ...	15,7

Desprezando os graus e minutos, por serem communs, e aproveitando só as partes do microscopio micrometrico, temos as equações (12 a) ou

$$65^p = A + 2,6w$$

$$60 = A + 5,1w$$

$$55 = A + 7,8w$$

$$50 = A + 10,5 w$$

$$45 = A + 12,9 w$$

$$40 = A + 15,7 w;$$

tomando a media, subtrahindo-a successivamente de cada uma das simples, e attribuindo-se ás diferenças o mesmo signal, resultam as equações (13)

$$\left. \begin{array}{l} 12,5 = 6,5 w \\ 7,5 = 4,0 w \\ 2,5 = 1,3 w \\ 2,5 = 1,4 w \\ 7,5 = 3,8 w \\ 12,5 = 6,6 w \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 12,5 - 6,5 w = \Delta_1 \\ 7,5 - 4,0 w = \Delta_2 \\ 2,5 - 1,3 w = \Delta_3 \\ 2,5 - 1,4 w = \Delta_4 \\ 7,5 - 3,8 w = \Delta_5 \\ 12,5 - 6,6 w = \Delta_6 \end{array} \right.$$

Pelo methodo dos menores quadrados, temos (eq. 14)

$$w = \frac{[p k]}{[k k]} = \frac{229,00}{119,90} = 1^r,910;$$

e depois: $\Delta_1 = +0,08$; $\Delta_2 = -0,14$; $\Delta_3 = +0,02$; $\Delta_4 = -0,17$; $\Delta_5 = +0,27$; $\Delta_6 = -0,11$, Isto é, cada divisão do nivel vale 1,910 partes do tambor do micrometro, e os *residuos* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$ indicam a boa divisão do tubo. Depois converttem-se em segundos as partes do tambor.

Supponhamos, emfim, que a serie antecedente foi observada á temperatura de $+5$ graus centigrados, e que as 1,910 partes convertidas em segundos dão $2'',20$. Sejam: $2'',20, 2'',29, 2'',34, 2'',38, 2'',45$ outros tantos valores de w obtidos ás temperaturas de $+10, 15, 21, 25$ e 28 graus; teremos pela equação (15)

$$\left. \begin{array}{l} 2'',26 = 2'',20 + 5 F \\ 2,29 = 2,20 + 10 F \\ 2,34 = 2,20 + 16 F \\ 2,38 = 2,20 + 20 F \\ 2,45 = 2,20 + 23 F \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,06 - 5 F = \Delta_1 \\ 0,09 - 10 F = \Delta_2 \\ 0,14 - 16 F = \Delta_3 \\ 0,18 - 20 F = \Delta_4 \\ 0,25 - 23 F = \Delta_5 \end{array} \right.$$

e pelo methodo dos menores quadrados

$$F = + 0,009$$

Logo a formula de reduccão será

$$w = 2'',20 + 0,009(t - 5)$$

E assim se procede em casos identicos.

10. Defeitos nos microscopios micrometricos e nonios.—As medidas micrometricas estão sujeitas, principalmente, a duas especies de erros: uns provenientes da irregularidade das roscas do parafuso, e que influem durante o decurso de uma volta do tambor, outros resultantes de não ser completa a egualdade do passo em toda a extensão do mesmo parafuso. Uns e outros se manifestam em não serem proporcionaes entre si os espaços percorridos pelo tambor e pelos fios moveis do micrometro.

Podem estudar-se e conhecer-se as irregularidades da rosca por um processo analogo ao empregado na determinação dos erros da graduação dos limbos (n.º 8), sendo conveniente construir depois taboas que deem a correcção das leituras do tambor. E emquanto á differença dos passos do parafuso micrometrico deve determinar-se o valor de cada volta completa dentro dos limites necessarios, que são prescriptos pela graduação dos circulos dos instrumentos. Se o tambor fizer duas voltas ou revoluções para que os fios percorram a minima divisão do limbo, bastará estudar dois passos para um e outro lado do zero micrometrico.

Supponhamos que o circulo está dividido de 4 em 4 minutos e que tomamos n'elle uma divisão, a qual, depois de bem estudada, apparece com o erro δ que lhe é particular (n.º 8); teremos o valor da mesma divisão representado por

$$240'' + \delta,$$

podendo δ ser positivo ou negativo. Colloquemos no zero o parafuso micrometrico andando com elle n'um determinado sentido, façamos girar o circulo ou a alidade de modo que um dos traços da divisão escolhida fique coincidindo com os fios; em seguida continuando a andar com o tambor no mesmo sentido, façamos a coincidencia no outro traço da divisão: a leitura micrometrica, depois de correcta da irregularidade da rosca, será em geral

$$240 + p$$

Ora se, a partir do zero, o tambor se tivesse deslocado exactamente $240''$, a leitura deveria ser

$$240 + p - \delta$$

Logo será necessario multiplicar as leituras micrometricas, já correctas do erro da rosca, pelo factor

$$\frac{240}{240 + p - \delta}$$

O mesmo acontece qualquer que seja o systema de gradação do limbo, pondo-se em vez de 240 o valor presumptivo da minima divisão expresso em segundos.

Nos instrumentos portateis, como são os theodolitos, prescinde-se de estudos tão minuciosos como os que exigem os grandesapparelhos dos observatorios fixos. Os valores angulares correspondentes ás leituras micrometricas podem determinar-se approximadamente pelo modo seguinte: colloca-se o instrumento sobre um apoio bem firme; põe-se o index da alidade em frente do zero de gradação do circulo, e, depois de apertado o respectivo parafuso de pressão, que fixa o systema, fazem-se em cada microscopio duas

leituras successivas sobre os traços que limitam a divisão do limbo mais proxima do zero do micrometro. Assim se continua, fazendo variar a posição do index, isto é, estabelecendo-o em g graus $2g, 3g \dots$ até completar um giro de 360° .

Teremos, pois, para cada microscopio uma serie de leituras da seguinte fôrma:

$$L_2 - L_1 = N + \alpha_1$$

$$L'_2 - L'_1 = N + \alpha_2$$

$$L''_2 - L''_1 = N + \alpha_3$$

etc.

$L_1, L_2, L'_1, L'_2 \dots$ representam as leituras feitas nos dois traços successivos; N o numero de voltas que o tambor deveria rigorosamente dar; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ os pequenos desvios da leitura real a respeito da leitura theorica, ou de N .

Representando agora: a a média de todos os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots$ tomados com o respectivo signal, N'' o numero de segundos de uma divisão minima do limbo, teremos o valor y'' de uma *parte* do tambor micrometrico dado pelo seguinte quociente

$$\frac{N''}{N + a} = y'',$$

aonde supomos N expresso em partes do tambor.

Estas series de experiencias devem repetir-se a temperaturas mui differentes para se examinar se existe alguma lei que indique o effeito produzido pelas dilatações.

Conhecido o valor de y'' para cada microscopio, tanto do azimuthal como do vertical, organizar-se-hão outras tantas taboas destinadas a facilitar a reducção a minutos e segundos de todas as leituras micrometricas¹.

¹ Veja-se a obra intitulada *Base central de la triangulacion geodesica de España*, apendice n.º 2.

Nos nonios também costumam dar-se imperfeições, sendo as mais vulgares o não abrangerem os seus traços extremos um numero exacto de divisões do limbo. Quando a graduação é conica ou plana, devem existir parafusos por meio dos quaes possa augmentar-se ou diminuir-se a distancia do nonio ao circulo, e, como os traços são convergentes, poderá algumas vezes estabelecer-se por tentativas a coincidência desejada.

Não havendo parafusos, ou não convindo mecher n'elles, podem corrigir-se as leituras tendo previamente operado do modo seguinte:

Faz-se a coincidência do zero do nonio no traço zero da graduação do limbo, e examina-se qual dos outros traços do mesmo nonio coincide melhor; repete-se a operação em diferentes partes da graduação, por exemplo de 10 em 10 graus e toma-se a média s das coincidencias a contar da extremidade do nonio opposta ao zero. Se a extensão do nonio fôr maior que a parte que lhe deve corresponder no limbo, não haverá outro ajustamento além do da linha de fé da alidade, e por isso para obter n'este caso o valor de s deve acertar-se com o limbo a extremidade do nonio opposta ao zero e ver a coincidência nos traços que costumam preceder a linha de fé ou zero do nonio. Depois repete-se a operação como fica dito.

Conhecendo s , facilmente veremos qual é a natureza ou *sensibilidade* real do nonio, mudando nas formulas respectivas (n.º 5) N em $N + s$. Assim as equações (7) e (8) dariam

$$y = L + n \frac{c}{N \pm s + 1}$$

$$c - w = \frac{c}{N \pm s + 1}$$

Exemplo: Supponhamos que n'um theodolito de 2.^a classe temos $c = 10'$ e $N + 1 = 60$, o que dá $10''$ como expressão da sensibilidade ou natureza do nonio; se este fôr defei-

tuoso e acharmos $s = -2,3$ divisões, teremos

$$y = L + n \frac{10'}{59 - 2,3 + 1} = L + n \frac{10'}{57,7}$$

$$c - w = \frac{10'}{57,7} = 10'',4$$

Portanto a sensibilidade real do nonio será $10'',4$; e se na leitura de um angulo achassemos $n = 20$, teriamos

$$y = L + 3'. 28'',$$

isto é, deveriamos ajuntar á leitura directa L do limbo $3' 28''$ em vez de $3' 20''$.

As formulas antecedentes facilmente se adaptam aos diferentes casos da pratica.

11. Excentricidade dos limbos.—Entre o centro de qualquer limbo graduado e o eixo de rotação da respectiva alidade existe um desvio inevitavel, de modo que este eixo, ou o seu prolongamento, só por acaso conterà em si o centro do limbo a que pertence. Aos defeitos que d'ahi derivam para a leitura dos arcos, costuma dar-se o nome de *erros de excentricidade dos limbos, ou das alidades*, erros que é necessario eliminar ou corrigir.

Seja, (fig. 23), C o centro do circulo graduado $OA O' a$, e C' o ponto pertencente ao eixo de rotação da alidade; façamos passar por CC' uma recta cujo prolongamento se extenda até á circumferencia: teremos que OO' representará um diametro d'aquelle circulo.

Se o index da mesma alidade, depois de coincidir com o ponto O , aonde marca uma certa graduação g , vier depois ajustar-se no ponto O' , marcará n'este ultimo a graduação $180 + g$ e as leituras de arco são taes como se não existisse erro de excentricidade. Mas este caso é unico. Com effeito, em A' o arco $A' - g$ pertence a um angulo C' me-

nor que o verdadeiro C , da quantidade equivalente $A - A'$, e esta differença é negativa nos pontos a e a' , que lhe são oppostos: logo o erro é manifesto e tanto maior, positiva ou negativamente, quanto mais o arco $A - g$ se approximar de 90° ou 270° . Comtudo, quando em vez de uma alidade existem duas A' , a' , sobre a mesma linha recta, a somma $A' + a'$ das duas leituras será igual a $A + a$, e se depois de subtrahir 180° áquella somma, tomarmos a metade do resto, teremos a direcção A' correcta da excentricidade.

Esta lei é só exacta quando as duas alidades forem exactamente oppostas, porém faculta um meio facil de conhecer o pequeno desvio δ do angulo de 180° , que ellas deviam fazer entre si. Effectivamente, se dividirmos a circumferencia n'um grande numero n de partes eguaes (por exemplo, de 10 em 10 graus) e se em cada uma d'estas partes fizermos leituras empregando as duas alidades, a somma das differenças d'estas leituras conjugadas, tomadas com o respectivo signal, deve ser igual a zero. Ora se o não fôr, mas sim igual a $\pm s$, teremos

$$\delta = \pm \frac{s}{n}$$

Obteriamos em seguida um conhecimento approximado da posição de OO' , ou do valor de g , pela inspecção das referidas differenças, menos 180° , comparadas com o valor de δ , pois as que menos se afastarem d'este, devem comprehender a posição de OO' ou da linha recta que passa pelos centros C e C' , em relação ao zero do limbo.

Trataremos agora estas questões por meios analyticos. Seja, (fig. 24), $CC' = e$, $CA = CA' = r$. Visto poderem considerar-se quasi eguaes os angulos C e C' , teremos

$$\frac{\text{sen } (A - A')}{e} = \frac{\text{sen } (A - g)}{r} = \frac{\text{sen } \{(A' - g) + (A - A')\}}{r}$$

ou

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A - A') = \frac{e}{r} \left\{ \operatorname{sen}(A' - g) \cos(A - A') \right. \\ \left. + \operatorname{sen}(A - A') \cos(A' - g) \right\} \end{aligned}$$

d'onde resulta

$$\operatorname{tg}(A - A') = \frac{\frac{e}{r} \operatorname{sen}(A' - g)}{1 - \frac{e}{r} \cos(A' - g)}$$

Effectuando a divisão no segundo membro e tomando no primeiro o arco pela tangente, visto ser sempre $(A - A')$ muito pequeno, será

$$\begin{aligned} A - A' = \frac{e}{r} \operatorname{sen}(A' - g) + \frac{e^2}{r^2} \operatorname{sen}(A' - g) \cos(A' - g) \\ + \frac{e^3}{r^3} \operatorname{sen}(A' - g) \cos^2(A' - g) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Se houvesse uma segunda alidade B' , solidamente ligada com a primeira e formando com ella um certo angulo, teriamos uma equação identica, e as duas poderão reduzir-se ás seguintes, attendendo ao pequeno valor de $\frac{e}{r}$,

$$\left. \begin{aligned} A &= A' + \frac{e}{r} \operatorname{sen}(A' - g) \\ B &= B' + \frac{e}{r} \operatorname{sen}(B' - g) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

A semi-somma dá

$$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A' + B') + \frac{e}{r} \operatorname{sen}\left\{\frac{1}{2}(A' + B') - g\right\} \cos\frac{1}{2}(A' - B')$$

Se

$$A' - B' = 180^\circ,$$

será

$$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A' + B')$$

Portanto, quando a alidade é composta de dois nonios ou microscopios micrometricos exactamente oppostos um ao outro, elimina-se o erro de excentricidade do limbo fazendo simultaneamente a leitura em ambos os nonios ou microscopios, como já dissemos. O mesmo aconteceria se a alidade tivesse tres braços que formassem tres angulos eguaes, ou de 120° .

Tomando a differença das equações (16), teremos

$$B - A = B' - A' + 2 \frac{e}{r} \cos \left\{ \frac{1}{2}(A' + B') - g \right\} \sin \frac{1}{2}(B' - A');$$

e suppondo que os dois braços da alidade fazem entre si um angulo pouco differente de 180° , de sorte que

$$B' - A' = 180^\circ + \delta,$$

será

$$B - A = 180^\circ + \delta + 2 \frac{e}{r} \cos \left\{ \frac{1}{2}(A' + B') - g \right\} \sin \frac{1}{2}(B' - A')$$

Finalmente, desenvolvendo o coseno e fazendo para simplificar

$$B - A = M,$$

$$2 \cos \frac{1}{2}(A' + B') \sin \frac{1}{2}(B' - A') = N,$$

$$2 \sin \frac{1}{2}(A' + B') \sin \frac{1}{2}(B' - A') = P,$$

$$\frac{e}{r} \cos g = x, \quad \frac{e}{r} \sin g = y,$$

teremos

$$M = 180^\circ + \delta + Nx + Py$$

Podemos obter assim uma serie de equações corresponden-

tes a outras tantas leituras conjugadas feitas no limbo, isto é,

$$M_1 = 180^\circ + \delta + N_1 x + P_1 y$$

$$M_2 = 180 + \delta + N_2 x + P_2 y$$

$$M_3 = 180 + \delta + N_3 x + P_3 y$$

etc.

Estas equações, que devem ser em grande numero, darão pelo methodo dos menores quadrados os valores mais provaveis de x , y e δ , e por consequencia os de g e $\left(\frac{e}{r}\right)$.

Sendo inevitavel a excentricidade dos limbos em maior ou menor grau, é muito necessario que o observador tenha sempre em vista as antecedentes regras, para não acontecer reputarem-se maus para trabalhos delicados alguns theodolitos excellentes. Já vimos observadores inexpertos regeitarem instrumentos só pelo facto de não ser constante a differença de leituras nas duas alidades.

12. Reacções dos parafusos ajustantes.— Logo depois do acto das pontarias, podem dar-se pequenos desvios provenientes das reacções dos parafusos que servem para o ajustamento d'ellas: com effeito quando a mão do observador abandona o parafuso de reclamo, pode este arrastar ou repelir a alidade, conforme o movimento da rosca fôr retrogado ou progressivo, por causa de uma certa pressão exercida na porca. Taes desvios, comtudo, são as mais das vezes insensiveis.

Para, até certo ponto, se atenuarem os effeitos d'estas imperfeições no machinismo, costumam fazer-se dois ajustamentos ou pontarias, andando primeiro com o parafuso n'um sentido e depois no outro, e fazendo a leitura do limbo em ambos os casos; se no primeiro a leitura é maior que a verdadeira (correspondente á direcção exacta), no segundo deverá ser menor, e a média ficará correcta, proximamente.

Escusado é dizer que estas manobras, de que ainda outra vez fallaremos, só costumam ter logar nas observações delicadas.

13. Flexão dos oculos.—O peso da objectiva, actuando na extremidade do tubo do oculo, produz n'este uma certa flexão no sentido vertical, que tende a diminuir as distancias zenithaes lidas no respectivo limbo. Esta flexão é maxima estando o oculo em sentido horizontal e nulla quando voltado para o zenith ou para o nadir. Se os effeitos da flexão são muito sensiveis nos grandes instrumentos astronomicos dos observatorios fixos, podem quasi sempre desprezar-se nos theodolitos, por causa do breve comprimento do oculo e pequeno volume da objectiva. Comtudo indicaremos um meio experimental de avaliar a flexão maxima.

Estabelecem-se dois apoios inabalaveis (pilares de alvenaria ou cantaria) com a superficie superior bem nivelada e proximamente á mesma altura. A sua distancia horizontal deve ser mui pequena para que o effeito da refração atmospherica se julgue nullo ou possa calcular-se com segurança. Colloca-se o instrumento n'um dos pilares e no outro uma pequena mira amovivel, de altura constante e que apresente um ponto bem distincto. Mede-se com o theodolito a distancia zenithal z da mira; depois trocam-se as posições d'esta e d'aquelle, tendo o cuidado de conservar constantes as suas relações com o pilar, e mede-se tambem a distancia zenithal z' da mira, na segunda posição.

Chamando C o angulo das verticaes dos dois pilares, r o effeito da refração atmospherica e f o da flexão, e tendo em vista que z e z' representam distancias zenithaes apparentes, teremos:

$$(z + r + f) + (z' + r + f) = 180^\circ - C;$$

d'onde se tira

$$f = \frac{1}{2} \{ 180^\circ - (z + z') - 2r - C \}$$

Como a distancia entre os dois pilares á facilmente conhecida por medidas directas, obtem-se com grande precisão r e C ; um grande numero de observações dará para $(z + z')$ um valor muito approximado da verdade: portanto f , ou o effeito da flexão horizontal do oculo devida ao peso da objectiva, ficará sufficientemente conhecido¹.

Quando a distancia entre os pilares fôr menor de 5 metros podemos fazer $r = 0$.

Se a differença de nivel dos apoios do instrumento e da mira variasse successivamente, e para cada uma tomássemos muitos valores de $(z + z')$, obteríamos a lei do decrescimento da flexão, para as distancias zenithaes successivamente menores; comtudo esta lei pode ser representada approximativamente por

$$f \text{ sen } z$$

E nada mais diremos sobre este assumpto, abstendo-nos de tratar da flexão do eixo horizontal do theodolito e da deformação do circulo de alturas devida ao proprio peso, por serem coisas quasi inapreciaveis em instrumentos portateis.

14. Formulas para a determinação das direcções azimuthaes.—N'estas medições, além dos erros de pontaria e de leitura, que podemos reduzir a erros furtuitos, costumam, como já dissemos, apresentar-se outros da classe dos systematicos e provenientes: 1.º do não perfeito verticalismo do eixo do circulo descripto pela alidade azimuthal; 2.º de não formar este eixo com o dos munhões do circulo vertical um angulo exactamente recto, isto é, de não serem re-

¹ Sendo k a distancia horizontal dos dois pilares ou apoios e R o raio terrestre, teremos com sufficiente approximação para este caso

$$C = \frac{k}{R \text{ sen } 1''}; \quad r = 0,086$$

ciprocamente perpendiculares as direcções dos dois eixos; 3.º do desvio da linha da collimação; 4.º da excentricidade do oculo; 5.º da falta da parallelismo entre o circulo descripto pela alidade e o respectivo limbo graduado. Acharemos a expressão geral das direcções azimuthaes em função d'estes erros, e o modo de os eliminar ou corrigir, cumprindo notar que, estando abandonado o methodo das repetições, todos os angulos horizontaes são obtidos por differenças de azimuth, cuja origem é arbitraria.

Sejam (fig. 24): $E O' E' L'$ o circulo descripto pelo ponto zero da alidade no seu giro, ou antes a intersecção do plano d'este circulo com a esphera celeste; P o respectivo polo, ou o lugar em que o eixo de rotação da dita alidade atravessa a mesma esphera; represente $E O E' L$ o circulo do verdadeiro horizonte, Z o zenith, e v a inclinação absoluta¹ do plano do circulo da alidade, ou o angulo que o eixo d'este circulo fórma com a vertical do lugar; indique m o ponto de que se requer a direcção azimuthal, referida a uma origem, que pode ser arbitraria, mas que, para simplicidade do raciocinio, supponhamos dada pelo plano vertical em que existe P , ou $P Z O$; finalmente designem z' e z as distancias zenithaes, apparente e verdadeira, do ponto m , ou os arcos do circulo maximo Pm e Zm . Segue-se que o arco Ol dará a direcção azimuthal exacta $A = O Z l$, emquanto que o zero da alidade indicará o arco $O'l'$, medida do angulo azimuthal apparente $O' P l' = \alpha$.

Para achar a relação entre A e α consideremos o triangulo espherico $P Z m$, o qual dá

$$\text{sen } v \cotg z = \text{sen } A \cotg \alpha - \cos v \cos A$$

ou

$$\cotg \alpha = \frac{\text{sen } v \cotg z}{\text{sen } A} + \cos v \cotg A$$

¹ Entender-se-ha sempre por *inclinação absoluta* a que é referida ao horizonte.

e

$$\cotg A - \cotg \alpha = \cotg A (1 - \cos v) - \frac{\sen v \cotg z}{\sen A}$$

Além d'isto, existe a conhecida relação

$$\cotg A - \cotg \alpha = \frac{\sen(\alpha - A)}{\sen A \sen \alpha};$$

logo:

$$\sen(\alpha - A) = \cos A (1 - \cos v) \sen \alpha - \sen v \sen \alpha \cotg z$$

Ora α será sempre pouco differente de A , se o instrumento tiver alguma rectificação, mesmo grosseira que seja, e o ponto de mira não estiver muito perto do zenith; portanto podemos fazer, no segundo membro d'esta ultima equação, $\alpha = A$, e considerando, além d'isto, que

$$1 - \cos v = 2 \sen^2 \frac{1}{2} v,$$

teremos

$$\sen(\alpha - A) = \sen \alpha (2 \cos \alpha \sen^2 \frac{1}{2} v - \sen v \cotg z)$$

ou, exprimindo a correcção em segundos, e attendendo a ser mui pequeno o angulo $(\alpha - A)$,

$$A = \alpha + \frac{\sen \alpha}{\sen 1''} (\sen v \cotg z - 2 \cos \alpha \sen^2 \frac{1}{2} v)$$

Vê-se por esta equação que, chamando $(\delta \alpha)_1$ o erro azimuthal proveniente da falta de perfeito verticalismo do eixo de rotação, podemos suppor

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad & \left. \begin{aligned} \sen(\delta \alpha)_1 &= \sen \alpha (\sen v \cotg z - 2 \cos \alpha \sen^2 \frac{1}{2} v) \\ (\delta \alpha)_1 &= \frac{\sen \alpha}{\sen 1''} (\sen v \cotg z - 2 \cos \alpha \sen^2 \frac{1}{2} v) \end{aligned} \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

Supponhamos agora que o eixo dos munhões, ou de rotação vertical, não é paralelo ao circulo $EO'E'L'$ da alidade azimuthal, segue-se que aquelle terá a respeito d'este certa inclinação i , que obrigará o oculo, perpendicular ao dito eixo, a descrever em seu giro planos não normaes ao circulo horizontal, mas sim tangentes a um cone recto invertido, cuja base (fig. 25) é parallela ao mesmo circulo. Assim, o eixo optico do oculo dirigido ao ponto m descreverá, girando em torno dos munhões, o plano $CP'ms$ que se desvia do normal $CPmm'$. Portanto, se o ponto observado não estiver no prolongamento do plano do circulo da alidade, o arco indicado por esta será menor ou maior que o devido, conforme o plano descripto pelo oculo passar por P' ou P'' .

Para achar a correcção $m's$, ou $(\delta\alpha)_2$, consideremos os triangulos rectangulos PmP' e smm' , nos quaes, chamando τ o angulo em m , e suppondo $z=z'$ (o que pode fazer-se sem erro apreciavel não estando m perto do zenith) será

$$\text{sen } (\delta\alpha)_2 = \text{sen } (90^\circ - z) \text{ sen } \tau$$

$$\text{sen } i = \text{sen } z \text{ sen } \tau$$

Logo

$$\text{sen } (\delta\alpha)_2 = \text{sen } i \cotg z$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ou, quando } z \text{ fôr proximo de } 90^\circ, \\ (\delta\alpha)_2 = i \cotg z \end{array} \right\} \quad (18)$$

Temos supposto que o eixo optico do oculo, dado pelo centro do reticulo, era perpendicular ao eixo de rotação dos munhões; se o não fôr, teremos *erro de collimação*, isto é, o eixo optico descreverá em seu giro não um plano, mas um cone recto cuja base (fig. 26) existirá n'um plano $P'm's$ parallelo a Pm . O arco indicado pela alidade (supporemos sempre a graduação do limbo correndo da esquerda para a direita) será menor ou maior que o real, conforme o des-

vio c fôr no sentido de P' ou P'' ; e considerando o triangulo rectangulo $m P m'$, no qual o angulo em P , a que chamaremos $(\delta \alpha)_3$, representa o effeito do erro de collimação, ou do desvio c indicado, teremos:

$$\text{sen } (m m') = \text{sen } c = \text{sen } z \text{ sen } (\delta \alpha)_3$$

Logo:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } (\delta \alpha)_3 &= \frac{\text{sen } c}{\text{sen } z} \\ \text{ou} \quad (\delta \alpha)_3 &= \frac{c}{\text{sen } z} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

quando z fôr proximo de 90° , e attendendo á grandeza de c . Vê-se, pois, que o effeito do erro de collimação será minimo se o ponto observado estiver no horizonte, caso em que $(\delta \alpha)_3 = c$.

Finalmente, se projectassemos o eixo optico do oculo sobre o limbo, a sua projecção raras vezes passaria exactamente pelo centro d'este, havendo uma causa de erro que se designa por *excentricidade do oculo*, a qual pode reputar-se como um erro de collimação variavel com a distancia do objecto a que se dirige a pontaria. Chamando d esta distancia (fig. 27), $Co = e$ a excentricidade, e M o angulo Cmo , temos:

$$e = d \text{ tg } M, \quad \text{ou} \quad M = \frac{e}{d \text{ sen } 1''};$$

e portanto o seu effeito será:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } (\delta \alpha)_4 &= \frac{\text{sen } M}{\text{sen } z} \\ \text{ou, quando } z \text{ fôr proximo de } 90^\circ, \\ (\delta \alpha)_4 &= \frac{\text{sen } M}{\text{sen } z \text{ sen } 1''} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Quando a distancia d se poder reputar infinitamente grande em relação a e , será $M=0$, e por isso nulla a influencia da excentricidade do oculo¹.

O limbo em que se fazem as leituras pode não ser exactamente paralelo ao circulo descripto pela alidade, ao qual nos temos referido; por isso, se existir uma certa inclinação ω , que tem de ser pequenissima (de outro modo não poderiam funcionar bem os nonios ou microscopios micro-metricos) devemos achar a correcção devida a esta circumstancia. Supponhamos (sem erro para este caso) que os centros dos dois circulos se confundem, e seja u o arco do limbo comprehendido entre o diametro commum, no ponto Q anterior á direcção observada, e a origem OzP que se adoptou (fig. 24); teremos (fig. 30) designando por a a direcção azimuthal dada no limbo

$$\operatorname{tg}(\alpha - u) = \operatorname{tg}(a - u) \cos \omega,$$

d'onde se deduz, com insignificantes desprezos,

$$\alpha = a - \frac{\operatorname{sen} 2(a - u) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega}{\operatorname{sen} 1''} \quad (21)$$

Na correcção (17) podemos, sem erro, usar de a em vez de α . E cumpre notar que se chamarmos g_0 , q e g as graduações do limbo, correspondentes respectivamente á origem PZO , ao ponto Q e á direcção do ponto observado m , teremos.

$$\left. \begin{aligned} a &= g - g_0 \\ u &= q - g_0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Reunindo agora todas as correcções expressas nas formulas (17), (18), (19) e (20), dando-lhes o signal corres-

¹ Temos supposto o ponto m acima do horizonte, porém as formulas (17), (18), (19) e (20) são geraes.

pondente ao caso das figuras 25, 26, 27 e 28, e suppondo a graduação do limbo no sentido indicado, resulta

$$A = \alpha + (\delta \alpha)_1 + (\delta \alpha)_2 + (\delta \alpha)_3 + (\delta \alpha)_4$$

ou, attendendo á equação (21),

$$A = a + (\delta \alpha)_1 + (\delta \alpha)_2 + (\delta \alpha)_3 + (\delta \alpha)_4 - \frac{\text{sen } 2(a-u)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega \quad (23)$$

Esta formula, em que conhecemos a natureza dos termos do 2.º membro, mostra como se pode passar do angulo azimuthal observado a para o verdadeiro A .

Se invertermos o systema movel do instrumento com um giro de 180º dado ás alidades, e tornarmos a dirigir pontaria ao mesmo ponto m , poderão julgar-se constantes os valores de v , i , c e M , mas os tres ultimos mudarão de signal. E se chamarmos a' o novo angulo medido no limbo, e continuando a suppor, só nas correcções, $\alpha = a = a'$ (do que não resulta erro sensivel), obteremos por um modo analogo ao anterior, a seguinte equação

$$A = a' + (\delta \alpha)_1 - (\delta \alpha)_2 - (\delta \alpha)_3 - (\delta \alpha)_4 - \frac{\text{sen } 2(a-u)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega,$$

da qual, sommada com (23) e tomando a média, resulta

$$A = \frac{a + a'}{2} + (\delta \alpha)_1 - \frac{\text{sen } 2(a-u)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega \quad (24)$$

Logo se tomarmos a média de duas observações encruzadas, ou *directa* e *inversa*, teremos a direcção azimuthal correcta: 1.º da falta de perpendicularismo entre os dois eixos principaes do theodolito; 2.º dos effeitos do erro de collimação; 3.º da excentricidade do oculo. Ficará apenas por eliminar o erro proveniente de ω , e o que resulta do valor de v . É pois indispensavel que este valor seja mui

pequeno, o que se conseguirá pela applicação dos respectivos níveis. Emquanto a ω , já dissemos que era forçosamente pequeno.

Quando o ponto observado estiver perto do horizonte, temos $z=90^\circ$, proximamente, e se, além d'isto, v fôr pequeno, a correcção $(\delta\alpha)_1$ será desprezavel. É o que sempre ou quasi sempre acontece nas observações dos pontos geodesicos, havendo cuidado de rectificar bem o instrumento n'esta parte. Mas se não podessemos apurar esta rectificação, existe um meio de eliminar sensivelmente os erros provenientes de tal falta, quando o fim das observações fosse obter pelas differenças azimuthaes os angulos entre objectos terrestres m m' , m'' , etc.; caso este o mais vulgar. Com effeito, suppondo no theodolito dois níveis encruzados em angulo recto e grosseiramente rectificados, levemos, ao fazer a primeira pontaria, a bolha dos níveis ao meio dos respectivos tubos, quanto possivel, empregando os parafusos nivelantes em que assenta todo o systema; feitas as pontarias a m m' , m'' , etc., n'este estado do instrumento, inverte-se o systema como fica dito e depois de effectuada a inversão dirige-se o oculo ao *mesmo primeiro ponto*; é natural que as bolhas dos níveis se achem deslocadas, porém chamem-se, tambem quanto possivel, á primitiva posição, empregando os mesmos parafusos; depois acerta-se a pontaria ao dito ponto e em seguida aos outros. É claro que d'este modo o circulo da alidade azimuthal tomará successivamente duas inclinações eguaes em relação ao horizonte, porém de signal contrario, isto é, se no primeiro caso attribuirmos a v o signal $+$, no segundo terá o signal $-$, conservando com pequenissima differença, a mesma grandeza absoluta. Teremos pois:

no 1.º caso,

$$(\delta\alpha)_1 = + \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } 1''} (\text{sen } v \cotg z - 2 \cos \alpha \text{sen}^2 \frac{1}{2} v),$$

no 2.º caso,

$$(\delta \alpha)_1 = - \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } 1''} (\text{sen } v \cotg z + 2 \cos \alpha \text{sen}^2 \frac{1}{2} v) + y,$$

indicando y qualquer desvio azimuthal do zero da graduação do limbo, proveniente de se ter tocado nos parafusos nivelantes.

A média das duas equações dá, fazendo $\alpha = a$,

$$(\delta \alpha)_1 = - \frac{\text{sen } 2a}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} y,$$

cuja substituição em (24) transforma esta equação em

$$A = \frac{a + a'}{2} - \frac{\text{sen } 2a}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} v - \frac{\text{sen } 2(a-u)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} y, \quad (25)$$

ou, representando por S os tres primeiros termos do segundo membro,

$$A = S + \frac{1}{2} y$$

Para os outros pontos m , m' , etc., teríamos

$$A' = S' + \frac{1}{2} y, \quad A'' = S'' + \frac{1}{2} y, \text{ etc.}$$

e nos angulos, dados pelas differenças das direcções A , A' , A'' , etc., ficaria eliminado y , permanecendo apenas os pequenissimos erros envolvidos em S , S' , S'' , etc.

Vê-se pois que, empregando-se o methodo de observação indicado, além das compensações obtidas na equação (24) fica o termo relativo á inclinação v do eixo do circulo de alidade reduzido a uma quantidade que poderá quasi sempre desprezar-se na pratica. Exemplo: tenha a o valor mais desfavoravel, que é o de 45° , e supponhamos que a inclinação do eixo chega a um minuto; será $\frac{1}{2} v = 30''$ e por consequencia

$$\frac{\text{sen } 2a}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} v = 0'',004$$

quantidade insignificante na maioria dos casos.

Os theodolitos de primeira classe costumam ter um grande nivel que pode apoiar-se sobre os munhões do eixo horizontal, por isso o exacto nivelamento d'este eixo em qualquer direcção azimuthal ficará as mais das vezes sufficientemente garantido, sem ser necessario deslocamento algum, considerando-se, $v=0$, ou corrigindo¹ qualquer pequena inclinação pela formula (18). Portanto a equação (24) reduz-se a

$$A = \frac{a+a'}{2} - \frac{\text{sen } 2(a-u)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega \quad (26)$$

Poderíamos em vez de a, a', u , pôr os seus valores expressos em arcos do limbo, contados a partir do zero da respectiva graduação (equações (22)), e resultaria

$$A = \frac{g+g'}{2} - g_0 - \frac{\text{sen } 2(g-q)}{\text{sen } 1''} \text{sen}^2 \frac{1}{2} \omega$$

E como na mesma posição da parte fixa do instrumento, g_0 é constante, ficará o seu valor eliminado quando tomarmos as diferenças que dão os respectivos angulos azimuthaes entre os pontos observados $m, m', m'',$ etc. Pode até prescindir-se d'esta consideração, pois, quando $v=0$, g_0 desaparece, ficando só para origem natural o zero do limbo.

Temos pois considerado as differentes hypotheses que se podem apresentar. Primeiramente suppozemos o caso geral, em que o instrumento tinha todos os eixos e planos

¹ Na observação das direcções azimuthaes a pontos muito elevados, ou em que a distancia zenithal se afaste muito de 90° , como acontece geralmente com os astros, é indispensavel, no acto das pontarias, a leitura do nivel dos munhões e o emprego da formula (18).

fôra da verdadeira posição. A este caso corresponde a equação (23); e se fizermos as inversões indicadas, no intervalo de observações successivas, teremos a equação (24) em que apparecem eliminados $(\delta\alpha)_2$, $(\delta\alpha)_3$ e $(\delta\alpha)_4$. Se além das inversões, reduzirmos, antes e depois d'ellas e no principio de cada serie de pontarias, as bolhas dos niveis ao meio dos tubos respectivos, terá logar a equação (25). Finalmente, quando a horizontalidade dos munhões está sempre garantida pelo nivel que n'elles se appoia ou suspende, ou poder deduzir-se com a formula (18), não é necessario mecher nos parafusos nivelantes, depois de rectificar o systema, e teremos a equação (26) em que só apparece uma pequena correcção á semi-somma dos angulos observados nas duas posições symetricas do instrumento, correcção que muitas vezes poderá desprezar-se na pratica.

Supponhamos, comtudo, que era necessario conhecer o valor da dita correcção: teriamos que determinar ω , e para isso vamos estabelecer alguns preliminares.

Se tomarmos um plano DHH (fig. 29) que tenha a respeito do horizonte HH uma pequena inclinação v cuja direcção é representada pela recta IL , é facil demonstrar que outra recta qualquer NI , assente no mesmo plano, terá com o horizonte a inclinação $v \cos \varphi$, sendo φ o angulo formado pelas duas rectas¹.

¹ Considerando a figura 30, abaixemos de I uma perpendicular sobre o plano do horizonte; seja h o seu comprimento e r a inclinação absoluta de NI , expressa em arco, teremos:

$$h = NI \text{ sen } r, \quad h = LI \text{ sen } v,$$

e por isso

$$NI \text{ sen } r = LI \text{ sen } v$$

ou, por serem r e v angulos pequenos, $NI \cdot r = LI \cdot v$; mas $LI = IN \cos \varphi$ logo:

$$r = v \cos \varphi$$

Estivemos para prescindir d'esta demonstração, por ser obvia.

Supponhamos agora no mesmo plano ainda outra recta IN' concorrendo em I e formando com IN um angulo de 90° ; a sua inclinação será, analogamente,

$$v \cos (90 - \varphi) = v \sin \varphi$$

Portanto a pequena inclinação v de um plano sobre o horizonte pode reputar-se a *resultante* das inclinações de duas linhas que no mesmo plano se cruzem em angulo recto. Em vez das linhas imaginemos dois niveis (ou um, tomando as duas posições successivamente) e sejam r e s as inclinações accusadas pela graduação dos mesmos, teremos:

$$v = \sqrt{r^2 + s^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{s}{r}$$

Logo, se applicarmos directamente ao limbo azimuthal dois niveis em direcções rectangulares, as inclinações accusadas pelos mesmos darão como *resultante* o valor da inclinação geral e o sentido d'ella.

Supponhamos agora que a alidade faz com a direcção do eixo dos munhões um angulo horizontal proximamente recto, e colloquemol-a em 90° do limbo, a projecção do eixo dos munhões sobre o circulo da alidade determinará um diametro correspondente á graduação 0° do mesmo. Apoiemos um bom nivel sobre os ditos munhões, que reputamos perfeitamente eguaes, e seja u_1 a inclinação indicada (eq. 5); gire-se com a alidade 180° e seja u_2 a nova inclinação dada pelo nivel; teremos a inclinação absoluta w do referido diametro, ou

$$w = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (27)$$

Colloquemos depois a alidade na graduação 0° e pratique-se

o mesmo, teremos analogamente a inclinação absoluta da nova projecção do eixo sobre o mesmo circulo, expressa por

$$w' = \frac{u_3 + u_4}{2} \quad (28)$$

Mas as duas projecções, ou diâmetros, fazem entre si um angulo recto; logo, pelos principios estabelecidos, a inclinação absoluta v do plano do circulo gerado pela alidade será dada pela seguinte equação

$$v = \sqrt{w^2 + w'^2} \quad (29)$$

e a direcção da inclinação por

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w}{w'}$$

isto é, a direcção da inclinação fará com o diametro de 0° o angulo φ .

Sendo o eixo de rotação da alidade necessariamente perpendicular ao circulo por ella descripto, segue-se que a inclinação d'este eixo em relação á linha de prumo será também igual a v .

Se em seguida, pelo modo já exposto, applicarmos sobre o limbo real do instrumento, e correspondendo aos diâmetros indicados, dois niveis, ou um nas duas posições rectangulares, teremos igualmente as inclinações absolutas (w) e (w') d'aquelles diâmetros, sendo as inclinações relativas ou reciprocas, no caso que nos occupa, expressas, sem erro sensivel, por

$$\left. \begin{aligned} (\delta w) &= w - (w) \\ (\delta w)' &= w' - (w)' \end{aligned} \right\} : \quad \text{logo} \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \sqrt{(\delta w)^2 + (\delta w')^2} \\ \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{(\delta w)}{(\delta w)'} \end{aligned} \right.$$

Com os valores de φ e φ' facilmente se deduzem os de g_0

e q (eq. 22), pois temos

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= 180^\circ \pm \varphi \\ q &= 90^\circ \pm \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Conhecidos ω , g e q , calcularemos a pequena correcção indicada na formula (26) e que é devida á falta de parallelismo entre o circulo descripto pela alidade e o respectivo limbo ¹.

Vimos como os erros azimuthaes $(\delta\alpha)_2$, $(\delta\alpha)_3$, $(\delta\alpha)_4$ e parte de $(\delta\alpha)_1$, podem ser eliminados por um processo mechanico, comtudo na pratica tambem será necessario algumas vezes calcular cada uma das correcções.

Já sabemos determinar v e por isso acharemos com facilidade o valor de $(\delta\alpha)_1$, sendo necessaria para o calculo do primeiro termo a distancia zenithal do objecto observado, ou z , que só exige n'estes casos uma grosseira approximação, prontamente obtida.

O calculo de $(\delta\alpha)_2$ exige o conhecimento de i , porém considerando as equações (27) e (28), vemos que os valores de u_1 e u_2 , ou de u_3 e u_4 dão

$$i = \frac{u_1 - u_2}{2} \quad \text{ou} \quad i = \frac{u_3 - u_4}{2} \quad (31)$$

Falta comtudo introduzir aqui a hypothese da desigualdade dos munhões. É difficil de apreciar a inclinação proveniente d'esta desigualdade, porém chegaremos ao seu conhecimento por meio de successivas inversões do braço de rotação e do nivel. Com effeito, sendo: k o angulo formado pelo eixo dos munhões com o prolongamento de uma recta que, existindo no plano d'aquelle, toque nas duas secções

¹ O valor de ω pode ainda determinar-se por outro processo de que nos occuparemos quando tratarmos das observações de angulos verticaes.

circulares d'estes, β , β' as inclinações accusadas pelo nivel, antes e depois de invertido o braço, teremos

$$k = \frac{\beta - \beta'}{4}$$

Uma grande serie de observações d'este genero nos dará com sufficiente approximação o valor de k , o qual será quasi sempre pequenissimo e só merecedor de apreciar-se em alguns trabalhos delicados feitos com instrumentos de primeira classe. Não obstante, para calcular o verdadeiro valor de i teremos, em vez das anteriores, as seguintes equações:

$$i = \frac{u_1 - u_2}{2} \pm k \quad \text{ou} \quad i = \frac{u_3 - u_4}{2} \pm k \quad (32)$$

Para achar o valor de c (eq. 19), dirige-se a pontaria a um ponto distincto, cuja distancia zenithal seja muito proxima de 90° e faz-se a leitura l do limbo horizontal, invert-se depois o oculo nas chumaceiras ou munhoneiras, com toda a cautela, e repete-se a mesma pontaria com o mesmo ponto do reticulo, fazendo-se no limbo a leitura l' ; teremos

$$c = \frac{l' - l}{2} \quad (33)$$

havendo o cuidado de observar se o desvio é no sentido da graduação ou em sentido contrario. No primeiro caso (fig. 26), teremos $+c$ e no segundo $-c$.

Finalmente, para se conhecer o valor de e , ou da excen- tricidade, e portanto o de $(\delta\alpha)_4$, escolhe-se um ponto pro- ximo e que tambem esteja no horizonte, pouco mais ou me- nos; dirige-se-lhe a pontaria e faz-se a leitura azimuthal λ ; depois invertem-se de 180° as alidades dos dois limbos, isto é, todo o systema movel do instrumento, e faz-se nova pontaria e nova leitura λ' : teremos um arco

$$\delta\lambda = \lambda' - \lambda$$

e portanto o valor de M da equação (20) será dado pela fórmula

$$M = \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) - c,$$

considerando, como na collimação, o caso dos signaes $+$ e $-$.

Conhecido M e medindo-se com escrupulo a distancia d , obteremos e pela conhecida relação

$$e = d \operatorname{tg} M$$

Estamos portanto habilitados a calcular a correcção $(\delta\alpha)_4$ logo que se conheça a distancia horizontal do objecto apontado e o valor grosseiramente approximado da sua distancia zenithal. Quando as distancias d forem consideraveis em relação a e , bastarão tambem os valores approximados d'ellas.

Julgamos conveniente esclarecer esta doutrina com um exemplo.

Supponhamos ainda que collocamos o eixo dos munhões nas duas posições rectangulares, correspondentes no limbo aos diametros que passam por 0° e por 90° , e atribuamos o signal $+$ ás inclinações n'estes sentidos, isto é, quando o munhão do lado da graduação 180° ou 270° , estiver mais elevado que o de 0° ou 90° , respectivamente. Seja:

$$u_1 = +31'',2, \quad u_2 = +12'',4, \quad u_3 = -9'',2, \quad u_4 = -25'',6;$$

teremos (equações (27) e (28))

$$w = +21'',8, \quad w' = -17'',4;$$

e portanto

$$v = 27'',89, \quad \varphi = -51^\circ.20',$$

levando a approximação de φ só até dezenas de minutos, o que é muito bastante.

Pelos signaes de w e w' vê-se que a direcção da inclinação absoluta v cáe no quarto quadrante, ou entre 270° e 0° ; portanto:

$$g_0 = 180^\circ - 51^\circ. 20' = 128^\circ. 40'$$

Sejam: $(w) = -5'',2$, $(w)' = -29'',0$ as inclinações absolutas dadas pelo nivel posto directamente sobre os diametros 0° e 90° do limbo real, teremos

$$(\delta w) = +27'',0; \quad (\delta w)' = +11'',6;$$

logo: (com a approximação anterior)

$$\omega = 29'',38, \quad \varphi' = +66^\circ. 50',$$

e por consequencia

$$q = 90 + \varphi' = 156^\circ. 50'$$

Com os valores de u_1, u_2, u_3, u_4 , obtem-se (equações (31))

$$i = +9'',4, \quad i = +8'',2: \quad \text{valor médio} \quad i = +8'',80;$$

mas se os munhões fossem deseguaes e tivessemos $k = +1'',20$ seria definitivamente

$$i = +10'',00$$

Por ultimo, supponhamos: 1.º que a direcção azimuthal do ponto m , lida no limbo, era de $98^\circ. 14'. 12'',58$ e a sua distancia zenithal (grosseiramente observada) $z = 88^\circ. 10'$; 2.º que obtinhamos $c = +34'',22$, $e = -0^m,132$; 3.º que a distancia horizontal de m era, proximamente, $d = 36200$

metros. Estariamos habilitados a fazer o calculo da equação geral (23). Com effeito:

$$a = 360^\circ + 98^\circ. 14'. 12'',58 - 128^\circ. 40' = 329^\circ. 34'. 12'',58$$

$$u = 156^\circ. 50' - 128^\circ. 40' = 28^\circ. 10'$$

$$a - u = 301^\circ. 24' \text{ (desprezando os segundos).}$$

Com estes elementos, com os dados anteriores, e considerando $\alpha = a$ nas correcções, achamos;

$$(\delta \alpha)_1 = -0'',451; \quad (\delta \alpha)_2 = +0'',320; \quad (\delta \alpha)_3 = +34'',236$$

$$(\delta \alpha)_4 = -0'',752; \quad \frac{\sin 2(a-u)}{\sin 1''} \sin^2 \frac{1}{2} \omega = -0'',001$$

Portanto, pela equação (23)

$$A = 329^\circ. 34'. 12'',58 + 33'',354 = 329^\circ. 34'. 45'',934$$

Se observassemos outro ponto m' em que fossem: direcção lida no limbo $= 206^\circ. 16'. 10'',36$; $z = 93^\circ. 20'$, $d = 14300$ metros; achariamos:

$$a = 77^\circ. 36'. 10'',36, \quad a - u = 49^\circ. 26'$$

Todos os outros elementos podem julgar-se constantes.

Effectuando calculos analogos aos anteriores, deduz-se pela mesma ordem:

$$\left. \begin{array}{l} 1.^a \text{ correcção} = -1'',586 \\ 2.^a \quad \quad \quad = -0,582 \\ 3.^a \quad \quad \quad = +34,276 \\ 4.^a \quad \quad \quad = -1,907 \\ 5.^a \quad \quad \quad = +0,001 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = +30'',202; \\ A' = 77^\circ. 36'. 40'',562 \end{array}$$

Portanto o angulo entre os dois pontos m e m' , será

$$A' - A = 108^{\circ}. 1'. 54'', 628,$$

valor correcto dos defeitos instrumentaes indicados.

A inversão do systema girante do instrumento, sem tocar nos niveis, daria A (equação 24) com o erro de $+0'', 450$ e A' com o de $+1'', 585$; logo o angulo $A' - A$ envolveria o erro $+1'' 135$.

A mesma inversão, reduzindo, antes e depois d'ella, as bolhas dos niveis ao meio dos tubos respectivos no principio de cada giro de observações, daria A (equação 25) com o erro de $-0'', 002 + \frac{1}{2} Y$ e A' com o de $-0'', 001 + \frac{1}{2} Y$; logo $A' - A$ envolveria o erro insignificante de $+0'' 001$.

Finalmente sendo $v=0$, pela rectificação directa do instrumento, e praticando-se as mesmas inversões, teriamos tambem $A' - A$ com erro de $+0'', 002$. É d'este ultimo modo que entre nós se fazem, modernamente, as observações geodesicas dos angulos de primeira ordem. Cumpre comtudo repetir que abstrahimos aqui dos erros da pontaria e dos de leitura de arco, cuja influencia pode attenuar-se de um modo quasi indefinido, por meio de reiterações successivas, logo que seja conhecida a lei a que obedece a divisão dos nonios ou o movimento dos parafusos micrometricos.

15. Formulas para a determinação das distancias zenithaes ou das alturas.—Seja P (fig. 30) o polo do circulo de azimuths, ou o ponto em que o eixo da alidade d'este circulo atravessa a esphera celeste; se o oculo estiver bem centralizado e não houver erro de colimação, o prolongamento do seu eixo optico, quando, existente no plano que dos munhões desce perpendicularmente ao dito circulo, passará tambem pelo ponto P . Desloquemos o oculo d'esta posição até acertar-se a pontaria no ponto m ; terá descripto um arco de circulo maximo $Pm = z'$, cujo plano será perpendicular ao de outro circulo maximo ee

gerado pela intersecção, com a mesma esphera, do já referido plano que passa pelo eixo dos munhões. Supponhamos a figura vista do zenith, que designamos por Z . Demais, se Pm ou z' fôr igual a 90° , o plano de ee será também perpendicular ao da distancia zenithal verdadeira $Zm = z$; mas se fôr maior ou menor que 90° , n'este caso ee fará com o plano de Zm um angulo de $90^\circ \pm \delta\alpha_1$, representando $\delta\alpha_1$ o valor dado pela equação (17) e relativo ao erro azimuthal proveniente de v .

Além da existencia de v , expressa na figura 30, e de que o arco ZP é a medida, consideremos a realidade de c e i , isto é, o erro de collimação e a falta de perpendicularismo entre os dois eixos principaes do instrumento; consideremos que ambos estes erros produzem o seu effeito para a direita do observador voltado para m , que reputamos acima do horizonte: a linha de mira do oculo em vez de passar por P passará pelo ponto P' , existente sobre o arco $e'e'$ de circulo maximo, que faz com ee o angulo $[\delta\alpha]$, o qual exprime a reunião dos valores $(\delta\alpha)_2$, $(\delta\alpha)_3$ dados pelas equações (18) e (19), e teremos $PP' = c + i$. Comtudo, se além do erro de collimação no sentido lateral, o centro do reticulo se afastar para um ou outro lado em sentido orthogonal ao primeiro, podemos considerar, sem erro pratico, que esse desvio existe no plano do arco $P'm$.

Represente, pois, P'' o verdadeiro ponto da esphera celeste por onde passa a linha de mira na posição inicial do oculo, e apontemos este, em seguida, para m ; ficará descripto o arco $P''m = z''$, o qual, se não pertence realmente a um circulo maximo, por causa do erro de collimação, pode julgar-se como tal. Emfim, seja $P'P'' = \gamma$, e $Ps = \delta = z' - (z'' + \gamma)$. Teremos no triangulo $PP'm$, rectangulo em P' :

$$\cos \{ (z'' + \gamma) + \delta \} = \cos (z'' + \gamma) \cos (c + i)$$

e

$$\cos \{ (z'' + \gamma) + \delta \} - \cos (z'' + \gamma) = \cos (z'' + \gamma) \{ \cos (c + i) - 1 \}$$

ou

$$2 \operatorname{sen} (z'' + \gamma + \tfrac{1}{2} \delta) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \delta = \cos (z'' + \gamma) 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c + i);$$

mas δ é um arco pequenissimo, ou que pode facilmente assim tornar-se, mesmo com grosseiras rectificações do instrumento; logo, exprimindo-o em segundos, teremos

$$\delta = \frac{\cos (z'' + \gamma)}{\operatorname{sen} (z'' + \gamma + \tfrac{1}{2} \delta) \operatorname{sen} 1''} 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c + i),$$

ou, pela relação já estabelecida entre δ , z' e z'' ,

$$z' = (z'' + \gamma) + \frac{\cos (z'' + \gamma)}{\operatorname{sen} (z'' + \gamma + \tfrac{1}{2} \delta) \operatorname{sen} 1''} 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (c + i) \quad (34)$$

N'esta formula podemos conhecer todos os valores que entram no segundo membro. Effectivamente z'' é dado pela observação directa¹; γ pode obter-se quando o oculo tem a faculdade de girar sobre o seu proprio eixo, dirigindo-se pontarias a um ponto fixo distincto, antes e depois de uma semi-revolução, tendo o cuidado de fazer esta manobra o mais levemente possivel e de ler no limbo vertical os respectivos arcos, cuja semi-differença dará immediatamente o valor desejado (para maior exactidão deve repetir-se a manobra uma ou mais vezes); e não podendo o oculo girar d'este modo, ficará γ eliminado pelo methodo das *observações encruzadas* ou das *inversões*, de que em breve nos havemos de occupar. Já sabemos como se obteem i e c (equações 32 e 33); falta-nos determinar δ , que pode achar-se approxi-

¹ O valor de z'' exprime o arco lido no limbo de alturas, ou a medida do angulo formado por dois planos, que, partindo do eixo dos munhões, como linha commum, passam, um por P'' e outro por m . Vê-se pois que o pequeno erro proveniente da hypothese de ser $P'm$ um arco de círculo maximo, não o sendo exactamente, só pode influir no calculo da correcção, e ahi de um modo completamente inapreciavel.

madamente, mas com o rigor necessario, lembrando-nos da natureza do pequeno triangulo $P s P'$, em que, sem erro para o caso, será¹

$$\delta = (c + i) \cos (90^\circ - [\delta \alpha]) = (c + i) \sin [\delta \alpha] \quad (35)$$

Temos pois o valor de z' ou a direcção do ponto m referida a um falso zenith P representado pelo polo do circulo de azimuths; resta-nos agora passar para o valor da verdadeira distancia zenithal z , ou altura $(90 - z)$.

Considerando na mesma figura 30 o triangulo $Z P m$, temos

$$\cos z = \cos z' \cos v + \sin z' \sin v \cos P$$

ou, por ser v muito pequeno,

$$\cos z = \cos z' + v \sin z' \cos P$$

d'onde se deduz, empregando as operações já conhecidas,

$$z = z' - \frac{\sin z'}{\sin \frac{1}{2}(z' + z)} v \cos P;$$

mas podemos fazer $\sin \frac{1}{2}(z' + z) = \sin z'$; portanto:

$$z = z' - v \cos P \quad (36)$$

O angulo P é formado pelos planos que partindo do eixo do circulo da alidade azimuthal, passam, um pelo zenith verdadeiro, e outro pelo ponto observado m ; angulo igual a $g - g_0$ e que sabemos determinar (equações 22 e 30), bem como v (equação 29); mas, attendendo a que a linha de

¹ O valor de δ para o calculo da correcção pode tambem obter-se pelo methodo das approximações successivas, empregando-se immediatamente a equação (34), em que $z' - (z'' + \gamma) = \delta$, e fazendo como primeira approximação $\frac{1}{2}\delta = 0$ no segundo membro.

mira do oculo está dirigida para m , o limbo vertical terá a direcção Pm' parallelamente a $P''m$, direcção que é mui pouco differente de Pm : portanto o nivel da alidade vertical, devendo ser parallelamente ao respectivo limbo, ficará sempre na direcção Pm , com mui pequeno erro. Esta consideração faz-nos ver que o valor de $-v \cos P$, ao qual chamaremos $+I$ (attendendo a ser $P > 90^\circ$ no caso da figura), pode ser dado directamente pelo nivel do vertical; e assim se pratica sempre com vantagem, para evitar demoras entre a leitura do nivel e a pontaria. Fazendo esta substituição na equação (36), e pondo em vez de z' o seu valor, tirado da (34), teremos finalmente

$$z = z'' + \gamma + I + \frac{\cos(z'' + \gamma)}{\sin(z'' + \gamma + \frac{1}{2}\delta) \sin 1''} 2 \sin^2 \frac{1}{2}(c + i) \quad (37)$$

Os valores de I , γ , i , c e por consequencia δ , mudam de signal conforme as condições do instrumento.

Esta formula satisfaz a todos os casos da pratica, mesmo quando o ponto observado estiver mui proximo do zenith.

Para medir o arco z'' é necessario conhecer a graduação do limbo, correspondente á posição inicial do oculo. Em alguns theodolitos, principalmente nos de segunda e terceira classe, costuma ser parallelamente ao horizonte, ou reputar-se como tal essa posição, coincidindo ao mesmo tempo o zero da alidade com o zero do limbo. Neste caso, depois de feitas as pontarias aos objectos, obter-se-hão *alturas* immediatamente (prescindimos agora das refrações), ou *distanças zenithaes* por complemento. Estes arcos podem estar sensivelmente correctos por effeito de rectificações previas; e nos theodolitos de segunda e terceira classe quasi sempre se prescinde de attender aos pequenos erros que ainda possam provir de i e c . Porém nos theodolitos de primeira classe, destinados a observações de alta precisão, é outro o modo de proceder-se.

A posição do zero do limbo é sempre indifferente. Supponhamos que a graduação corre, seguidamente, desde 0°

até 360° , e da esquerda para a direita (de cima para baixo) para quem estiver voltado para ella, sendo arrastada pelo oculo em seus movimentos, isto é, com o oculo fixo ao limbo, como acontece quasi sempre; dirija-se a pontaria ao ponto dado m , estando o limbo á esquerda do observador, e seja E o arco lido a partir do zero; conservando a alidade do vertical n'esta posição, dê-se ao systema girante uma volta azimuthal de 180° : é evidente que a linha de mira, a qual deve ser dirigida pelo centro do reticulo do oculo, terá descripto em torno do eixo da alidade azimuthal um semi-cone recto, cuja semi-abertura determinará a projecção do dito eixo sobre o limbo de alturas. Conservando agora fixa, ou proximamente fixa a alidade azimuthal, se tornarmos a dirigir a pontaria ao mesmo ponto m , a que, em geral, corresponderá no limbo outra leitura D , teremos (ajuntando 360° quando $E < D$)

$$\text{semi-abertura do cone} = \frac{360 + E - D}{2} = Z_{(a)} \quad (38)$$

Portanto a graduação do zenith do instrumento, ou do polo do circulo de azimuths, será

$$D + \frac{360 + E - D}{2} = \frac{360 + E + D}{2} = G_{(z)} \quad (39)$$

e a distancia zenithal apparente $z'' \pm \gamma = Z_{(a)}$ pode ser dada indifferentemente por qualquer das equações

$$z_{(a)} = \frac{360 + E + D}{2} - D, \text{ ou } Z_a = 360 + E - \frac{360 + E + D}{2} \quad (40)$$

que se reduzem á primeira (38), como devia ser¹. Comtudo

¹ Se a graduação do limbo correr em sentido contrario ao supposto, subsistem as mesmas formulas, com tanto que a posição inicial do limbo seja á direita do observador e mudando-se por isso E em D e D em

estas ultimas são quasi sempre empregadas nas observações dos astros: primeiramente determina-se a graduação do zenith por observações successivas a um ponto fixo bem distincto, e em seguida *E* ou *D*, ou ora um, ora outro d'estes valores, apontando ao astro em seu giro diurno. Obtem-se o zenith verdadeiro applicando a $G_{(e)}$ a correcção *I* do nivel.

Nas observações dos objectos terrestres costuma usar-se immediatamente da formula (38).

Com um tal methodo de observar vê-se que desaparece o erro proveniente do desvio γ do reticulo em sentido vertical, ficando só o da collimação *c* propriamente dita, pois obtem-se immediatamente $z_{(a)} = z'' \pm \gamma$. Esta vantagem é de alta importancia pela natureza do erro, e por isso muito conviria que a todos os theodolitos se applicasse o antecedente methodo das *inversões*. Nos de segunda classe de Troughton, por exemplo, podia o nivel do vertical não ser fixo ao oculo, como é, mas sim a um dos supportes do eixo d'este circulo, conservando-se paralelo ao mesmo circulo. Deste modo praticar-se-hia o methodo girando 180° com a alidade azimuthal, e depois invertendo o oculo nas proprias chumaceiras; primeiro de traz para deante, depois de baixo para cima. As formulas 38, 39 e 40 ainda seriam applicaveis a este caso; mas como a graduação, em vez de seguir sempre no mesmo sentido, corre em sentidos oppositos, para um e outro lado do zero, é necessario mudar o signal a *D* quando o zero ficar entre *D* e *E*. Além d'isto as alidades estão dispostas por fórma que das leituras de arco resulta (eq. 39), não a graduação do zenith, mas a do horizonte, bem como da equação 38 ou 40, resultarão *alturas*.

Falta ainda determinar um elemento muito importante, que é o valor de *I*, o qual se obtem pelo methodo expresso na formula (5) ou (5)', conforme o systema da graduação do nivel respectivo. Supponhamos o caso da formula (5), que é o mais commum, e que a graduação do limbo corre no sentido indicado, e designem agora: *d* e *e* as leituras da extremidade da bolha do nivel á direita e á esquerda do

observador, sempre voltado para a graduação do vertical, e correspondentes á pontaria E ; d' e e' as obtidas pelo mesmo modo, depois de invertido o systema, ou correspondentes á pontaria D ; w'' o valor angular, em segundos, de cada divisão do mesmo nível; teremos

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d-e}{2} \right) - \left(\frac{d'-e'}{2} \right) \right\} w''$$

Quando os theodolitos são muito portateis, de segunda e terceira classe, não costuma existir nos níveis graduação propriamente dita, mas sim dois ou tres traços para poder centralisar-se a bolha; n'este caso seria necessario obter-se uma rectificação exacta, o que é difficillimo, mas remove-se esta difficuldade com o methodo das *inversões*, tendo o cuidado de, antes de cada pontaria E e D , chamar com os parafusos nivelantes, que assentam no tripé, as bolhas dos níveis ao meio dos respectivos tubos. Se na primeira pontaria o eixo de rotação da alidade azimuthal fizer com a linha de prumo o angulo $+v$, fará $-v$ na segunda, ficando assim eliminado o valor de I .

As distancias zenithaes dos vertices geodesicos, observados com o theodolito, são sempre arcos proximos de 90° ; por isso, n'este genero de trabalhos, e havendo a certeza de que i e c são pequenos, poderemos quasi sempre prescindir do ultimo termo da equação (37), resultando a seguinte, que é geralmente empregada,

$$z = \frac{E-D}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d-e}{2} \right) - \left(\frac{d'-e'}{2} \right) \right\} w'' \quad (41)$$

Para maior esclarecimento do uso da formula (37) vamos dar dois exemplos: um, entrando com uma pequena distancia zenithal; outro, sendo ella proxima 90° .

Sejam:

$$z'' + \gamma \quad \text{ou} \quad z_{(a)} = 6^\circ. 14'. 10'', 22; \quad c = + 4'. 22'', 42; \\ i = - 10'', 42; \quad \text{e} \quad I = - 8'', 24.$$

Temos, pela equação (18),

$$(\delta \alpha)_2 = -0^\circ. 1'. 35'';$$

pela equação (19),

$$(\delta \alpha)_3 = +0^\circ. 40'. 15'';$$

e por conseguinte

$$[\delta \alpha] = +0^\circ. 38'. 40''.$$

A formula (35) dá

$$\delta = +3'' \text{ (proximamente).}$$

Calculando depois o ultimo termo da equação (34) expresso em δ , c , i e $(z'' + \gamma) = z_{(a)}$, quantidades conhecidas, ou que sabemos determinar, acharemos a correcção de

$$+1'',12$$

Logo

$$z = 6^\circ. 14'. 10'',22 + 1'',12 - 8'',24 = 6^\circ. 14'. 3'',10$$

Se fizéssemos $i=0$, teríamos a correcção de $+1'',53$, pouco differente da anterior; o que nos adverte praticamente de que na observação das distancias zenithaes muito pequenas devemos dirigir as pontarias, quanto possivel, pelo centro do reticulo.

Calculemos agora a mesma correcção com os mesmos dados, porém variando a distancia zenithal, que supomos igual a $93^\circ. 40'. 10'',00$; teremos:

$$(\delta \alpha)_2 = +1''; (\delta \alpha)_3 = +17''; [\delta \alpha] = +18''; \delta = +0'',02;$$

e, portanto,

$$\text{correccão} = + 0'',008,$$

isto é, um valor que bem pode desprezar-se na maioria dos casos, e que seria de todo inapreciavel se não attribuissemos á collimação um erro tão forte. A formula (41) pode pois empregar-se com toda a confiança na observação das distancias zenithaes dos pontos geodesicos.

Podemos ainda considerar a falta de parallelismo: 1.º entre o plano do circulo de alturas e o nivel respectivo; 2.º entre o mesmo plano e o do circulo descripto pela alidade se esta tivesse movimento de rotação, ou, o que vem a ser o mesmo, a falta de perpendicularismo entre o limbo e o eixo de rotação dos munhões.

A primeira correccão pode dispensar-se todas as vezes que, estando o nivel proximamente parallello, como sãe das mãos dos constructor do theodolito, determinarmos o valor angular das suas divisões empregando o proprio circulo vertical, como já indicámos, n.º 9. A segunda exige o conhecimento de ω (eq. 21) e será expressa do mesmo modo que nos angulos azimuthaes, applicando-se aos arcos E e D (eq. 41) ou directamente á distancia zenithal, não sendo esta obtida pelo methodo das *inversões*.

Attendendo á impossibilidade do emprego dos niveis na determinação do pequeno angulo ω seguiremos outro processo, que pode tornar-se extensivo ao azimuthal. Gire-se com o limbo em torno dos munhões, ou com alidade (conforme fôrem moveis aquelle ou esta); faça-se correr a graduação em frente de um ponto fixo mui proximo, escolhendo quatro divisões do limbo distanciadas de 90° , que podem ser 0° , 90° , 180° e 270° , e á medida que passarem em frente do dito ponto, tome-se com uma pequena regua ou parafuso de finissima graduação a sua distancia áquella referencia no sentido perpendicular ao plano do circulo; sejam d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , estas distancias em relação a 0° , 90° , 180° , 270° , respectivamente; seja Δ o diametro do limbo: teremos as inclinações p e p' dos diametros $180-0^\circ$ e $270^\circ-90^\circ$; ou

$$p = \frac{d_1 - d_3}{\Delta \sin 1''}, \quad p' = \frac{d_2 - d_4}{\Delta \sin 1''};$$

d'onde resulta, pelos principios estabelecidos,

$$\omega = \sqrt{p^2 + p'^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{p'}, \quad u = 90^\circ \pm \varphi$$

Logo em vez de E devemos considerar

$$E - \frac{\sin 2(E - u)}{\sin 1''} \sin^2 \frac{1}{2} \omega;$$

e analogamente para D e para a distancia zenithal observada, quando esta fôr obtida directamente.

Repetimos ainda, que esta correcção será as mais das vezes inapreciavel; pois existindo nonios, não poderia correr bem a alidade n'outro sentido que não fosse paralelo ao limbo; e existindo microscopios micrometricos, veriamos, no caso de ser ω consideravel, a imagem da graduação tornar-se mais ou menos clara, á medida que o limbo girasse nos munhões. Comtudo, quizemos tocar n'este ponto para poder remediar-se qualquer anomalia que se apresente na pratica.

Emquanto aos erros de excentricidade, tanto do limbo, como do oculo, subsistem as mesmas regras estabelecidas em os n.^{os} 11 e 14 do presente *estudo*.

16. Repetição e reiteração dos angulos.—O methodo da *repetição* consiste em ir ajuntando successivamente sobre o limbo o mesmo angulo tambem successivamente observado, em vez de o medir por meio de duas pontarias e duas leituras simples; isto é, pratica-se de modo que entre a extremidade de um arco e o principio do seguinte não haja descontinuidade; depois mede-se por uma leitura feita no fim da ultima pontaria o arco total, assim percorrido, e dividindo-o pelo numero das operações feitas, tem-se o va-

lor desejado, no qual devem ficar attenuados os erros de gradação e os de leitura, como veremos¹,

Para conseguir esta operação é necessario que os instrumentos chamados repetidores satisfaçam a duas condições: 1.^a o limbo e o oculo devem poder girar juntos em torno do eixo commum; 2.^a o oculo, levando comsigo a alidade, que lhe está annexa invariavelmente, deve poder girar em torno do mesmo eixo, conservando-se fixo o limbo.

Na pratica costuma proceder-se do modo seguinte: colloca-se o zero da alidade sobre o zero do limbo e aponta-se ao primeiro objecto m_1 da esquerda, se a gradação correr da esquerda para a direita, ou vice-versa, no caso contrario; depois, conservando o limbo completamente fixo, move-se o oculo para o ponto m_2 da direita ou esquerda, firma-se a alidade e a pontaria, e faz-se a respectiva leitura do limbo, que dará o angulo simples observado, entre m_1 e m_2 ; torna-se com todo o systema, agora inteiramente ligado, á posição primitiva; acerta-se a pontaria de m_1 , fixando o limbo, sem alterar a sua relação com a alidade, e em seguida, soltando só esta, aponta-se de novo a m_2 : ter-se-ha o angulo duplo. E assim por deante.

O methodo da *reiteração* é mais simples. Desloca-se systematicamente em azimuth e de quantidades eguaes, pouco mais ou menos, o zero do limbo, e em cada uma d'estas posições gira-se unicamente com o oculo ou alidade até se fazerem as pontarias m_1 , m_2 e as respectivas leituras de arco. Teremos, tomando as differenças d'estas leituras, tantos angulos simples entre os referidos objectos m_1 , m_2 , quantas forem as successivas posições do zero, e estes angulos ficarão medidos por differentes sectores do limbo, isto é, em sectores correspondentes a diversos logares da gradação.

Ambos estes processos constituiram um progresso emi-

¹ Não falamos aqui das *repetições duplas*, empregando dois oculos, por ser o systema essencialmente o mesmo e estar ainda mais sujeito a erros systematicos. O segundo oculo, se o houver, deve servir de fiel.

nente na medição dos angulos. O primeiro, ou das repetições, indicado por T. Mayer, foi introduzido pelos geometras francezes no fim do seculo passado, e o *circulo repetidor* de Borda tornou-se então o instrumento geralmente escolhido, todas as vezes que se aspirava a obter nos angulos um elevado grau de precisão. O segundo, ou o das reiterações, é mais moderno na pratica, comtudo já Mudge, em 1799, o tinha indicado, sem o pôr em uso de um modo regular.

A primeira applicação verdadeiramente systematica do methodo das reiterações parece ser devida a Bessel, que em 1832 e 1833 o executou, com exclusão de qualquer outro, nas suas medições do meridiano da Prussia, medições que podem tomar-se por modelo. Mas o principio fundamental tinha já sido empregado methodicamente nas Indias orientaes pelo coronel Everest, e na Russia (em parte dos trabalhos geodesicos) por W. Struve e outros geometras. Depois foi o systema de Bessel quasi geralmente seguido, exceptuando alguns paizes, que ainda prestaram homenagem por muito tempo ao systema francez, ou das repetições ¹.

Comparemos agora o grau de precisão dos dois methodos.

Se, imaginando o theodolito perfeitamente rectificado, remontarmos ás causas que podem influir na exacta medição de um angulo simples, vemos que esta depende de tres condições: certeza de pontarias, exactidão das divisões do limbo, e segurança na leitura d'estas divisões ou fracções de divisão.

A certeza de pontarias é a mesma tanto na repetição como na medida simples; por isso, se reiterarmos esta medida tantas vezes como na repetição, chegaremos ao mesmo grau de certeza optica. Além d'isto o erro pessoal elimi-

¹ O auctor d'esta Memoria foi quem pela primeira vez usou em Portugal do methodo de reiterações nas observações de angulos geodesicos de primeira ordem.

na-se em ambos os casos. Não acontece, porém, outro tanto no que diz respeito aos mais elementos da observação.

Representem: a o erro provavel da pontaria, b o da leitura média obtida pelos nonios ou micrometros, e δ a correcção da divisão correspondente aos dois pontos observados m_1 e m_2 ; teremos ¹ a correcção e de um angulo simples expressa pela equação

$$e = \delta \pm \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Se a medição fôr feita n vezes, sempre sobre o mesmo arco do limbo, teremos a correcção da média reduzida a

$$f = \delta \pm \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{n}}$$

Logo, augmentando o numero de medições approximar-nos-hemos do grau de exactidão que admite o erro δ inherente a este arco do limbo. Ora, quando pelo processo indicado em o n.º 8 podessemos ter já conhecimento do valor de δ , acharíamos f e por consequencia o angulo procurado sem ser necessario deslocar o zero do limbo, isto é, sem reiteiração alguma. Mas o valor do erro δ jámais poderá obter-se

¹ Se α , β , γ ... designarem os erros provaveis comettidos em cada uma das operações A , B , C , etc. de que por somma ou differença depende exclusivamente o resultado X , o erro provavel d'este será expresso por

$$\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{etc.}} = Q$$

Mas, se em vez de uma só operação A e B e C , etc., forem praticadas com igual peso nA , nB , nC , etc. operações, o erro provavel final será expresso por

$$\frac{Q}{\sqrt{n}}$$

(Veja-se o calculo de probabilidades).

exactamente, sendo por isso necessario um certo numero s de reiterações para attenuar o effeito d'elle.

No caso de não seguirem lei alguma os erros de divisão, teriamos para s reiterações, em cada uma das quaes se fizessem n observações a cada ponto, o seguinte valor θ da correcção do angulo final:

$$\theta = \pm \sqrt{\left\{ \frac{2a^2 + 2b^2}{ns} + \frac{\delta^2}{s} \right\}};$$

por isso, augmentando muito o valor de s poderíamos reduzir θ a uma quantidade pequenissima, isto é, poderíamos achar com uma exactidão quasi indefinida o valor do angulo procurado. E na hypothese geralmente adoptada de que os erros de divisão, quando existem regularmente, seguem uma lei expressa pelos senos e cosenos dos arcos multiplos, poderíamos, ainda assim, eliminar esses erros systematicos fazendo as reiterações em arcos submultiplos de 90° ou 180° , segundo fossem 4 ou 2 os nonios.

Vê-se pois que o methodo de reiteração, considerado em theoria, satisfaz a todas as exigencias; o que tambem ha sido confirmado na pratica, medeante alguns preceitos de que fallaremos quando tratarmos do mechanismo das observações.

No systema das repetições succedem-se as coisas com certas differenças importantes. Assim, continuando a designar por a e b os erros provaveis já indicados, chamando δ' a correcção da divisão correspondente à ultima leitura, e λ o erro intrinseco que produz a propria operação da repetição feita n vezes, podemos exprimir a correcção θ' , do angulo final, por

$$\theta' = \lambda + \frac{\delta'}{n} \pm \frac{\sqrt{2b^2}}{n} \pm \sqrt{\frac{2a^2}{n}}$$

Logo, pondo de parte os erros a de pontaria, que se attenuam egualmente em ambos os methodos, vemos que

os de graduação e leitura se destroem com mais rapidez pelo systema das repetições. Subsiste, porém, inteiro o valor de λ que a pratica tem mostrado ser importante e muitas vezes inadmissivel nos trabalhos de precisão, exigidos pelo progresso da sciencia.

Effectivamente, o methodo das repetições está sujeito a uma objecção capital, pois suppõe que os differentes arcos medidos se ajuntam rigorosamente um ao outro sobre o limbo, isto é, que no intervallo das leituras as posições relativas do oculo e do circulo não mudaram. Ora, acontecerá quasi sempre o contrario por diversas causas, como são: o jogo dos eixos e dos parafusos, os attritos e elasticidade dos metaes, a necessidade de maior complicação na estrutura do instrumento, etc. Emquanto que no methodo das reiteraões o limbo pode estar mais firme em cada giro ou grupo de pontarias, sendo as operações de um giro (*mise*) completamente independentes das de qualquer outro. Accresce a isto maior rapidez na manobra; pois, se n'uma estação tivermos de observar mais de dois pontos, tomaremos todas as direcções em cada giro, sem ser necessario combinar os mesmos pontos dois a dois, não havendo tambem o perigo de ter que abandonar-se, às vezes quasi no fim, um trabalho longo como é uma serie de 20 termos, porque se notou qualquer engano no mechanismo da operação. É raro este ultimo caso em observadores experimentados, mas não o é nos principiantes.

Por todos estes motivos está o antigo methodo das *repetições* completamente abandonado hoje pelos geometras, sendo empregado exclusivamente o das *reiteraões*.

Effectivamente, nos instrumentos bem graduados, a repetição dos angulos não tem razão de ser. Pode, comtudo, em certos casos, quando só tivermos um theodolito repetidor com graduação consideravelmente imperfeita, haver alguma vantagem no emprego do antigo methodo; mas para se eliminar o mais possivel o effeito do jogo dos eixos e das reacções dos metaes, devemos tomar sempre as series de repetições duas a duas, girando n'uma com o oculo da

esquerda para a direita, e na outra da direita para a esquerda, e dando tambem aos parafusos ajustantes movimentos em sentidos oppostos. Tira-se depois a média.

O emprego de um segundo oculo, como *fiel*, é sempre indispensavel n'este methodo. Costuma, porém, dispensar-se no systema das reiterações com os theodolitos exclusivamente reiteradores, quando estes sejam bastante pesados e se installarem sobre solidos pilares de alvenaria ou cantaria. Assim acontece, por exemplo, nos de Repsold e nos de primeira classe de Troughton (instrumentos de altura e azimuth), que se acham privados do segundo oculo. Em qualquer outro caso, o fiel será sempre necessario, para por meio d'elle se conservar o limbo invariavel, durante cada giro de observações.

III

Pratica das observações com os theodolitos

17. Considerações geraes e installação dos instrumentos.—O uso dos theodolitos, e de quaesquerapparelhos destinados a obter medidas de precisão, requer sempre da parte dos observadores um certo numero de attenções e cautelas que devem augmentar muito, ao passo que o grau da approximação requerida fôr maior; portanto a primeira coisa que deve considerar-se é o fim ou o objecto das observações projectadas. Se, por exemplo, o trabalho a executar com o theodolito fôr um reconhecimento, ou a determinação da directriz de uma estrada de qualquer

natureza, ou um *esqueleto* topographico, seria tempo gasto inutilmente (salvo em circumstancias especiaes) aquelle que dispendessemos nas manobras ou rectificações pelas quaes nos approximassemos da verdade só oito ou dez segundos, além do valor obtido sem essas manobras ou rectificações. O contrario teria logar se medissemos uma triangulação geodesica. A classe do theodolito e o seu systema devem tambem servir-nos de guia, até certo ponto, para não tentarmos tirar d'elle resultados impossiveis de conseguir-se, ou que representariam uma approximação puramente illusoria.

O transporte dos instrumentos, a maneira de os tirar e metter nas respectivas caixas, são operações que devem merecer a maior attenção da parte dos observadores: não basta que estes tenham boa vista, é necessario que tenham boas mãos. Se um certo presbitismo ou myopismo pode ser defeito inteiramente remediavel pela graduação do oculo, não acontecerá o mesmo com os movimentos asperos e sacudidos, provenientes, ou do pouco disvello de quem observa, ou de tremura habitual. As molestias nervosas, que produzem estes effeitos, constituem um impedimento absoluto de bem observar.

É evidente que os theodolitos de segunda e terceira classe podem transportar-se facilmente, sem grande risco de desmanchos importantes, logo que haja cuidado de os preservar de grandes choques e vibrações. Além d'isto, podem andar quasi sempre sob a vista do observador, e os movimentos que proveem do dorso de uma cavalgadura mansa, ou de um carro de molas puchado sobre uma estrada regular, não lhes produzem geralmente defeitos que sejam apreciaveis. Nos theodolitos de primeira classe todas as cautelas de conducção são poucas: o seu grande peso, a delicadeza das suas peças, os fins a que é necessario que satisfaçam, tornam extremamente problematica a inteira conservação de todas as condições geometricas que lhes são proprias. Por isso, depois de transportados ás estações em que teem de funcionar, não devem d'ahi ser retirados sem

que todo o trabalho se ultime e complete, e, antes de começado, convirá sujeital-os a um minucioso exame para poder conhecer-se exactamente o seu estado.

Um theodolito de Repsold, não dos maiores, mas de excellente construcção, e que me ha servido para executar alguns trabalhos geodesicos de primeira ordem na provincia do Minho e n'outros pontos, tem sido conduzido em carros de boas molas, pelas estradas de Macadam, e a braço de homens, nos outros caminhos que dão geralmente accesso aos altos pincares das serras. O instrumento, depois de acondicionado na sua propria caixa, é metido, assim fechado, n'outra mais tosca que serve de resguardo á primeira. Dois varaes introduzidos lateralmente na caixa exterior, servem de pégas a dois homens, os quaes, um atraz, outro adeante, vão conduzindo o theodolito como em cadeirinha. Ás extremidades dos varaes costumam applicar-se correias, com o fim de poderem os conductores aliviar os braços, fazendo carregar o peso da caixa sobre os hombros. São necessarios quatro conductores para o indispensavel revezamento na conducção. O observador deve acompanhar de perto toda esta marcha, para escolher os melhores caminhos, fazer dar os convenientes descansos, e, emfim, ter a certeza de que não houve accidente algum, ou de que natureza foi, se por infelicidade o houver. Um tal methodo de conducção é ás vezes moroso e difficil, mas não deixa de ser o mais seguro.

A installação dos theodolitos é tambem assumpto da maior importancia. Os de segunda e terceira classe costumam ter tripés de madeira, que podem abrir-se convenientemente e firmar-se no terreno por fôrma que a ocular fique n'uma posição commoda para as observações. Devem as ponteiras do tripé apoiar-se em terreno firme e ficar distanciadas de modo que constituam, quanto possivel, os vertices de um triangulo equilatero. A firmeza do solo é condição essencial para o bom resultado das observações, o que se conhece facilmente, mudando o observador de lugar em torno do instrumento, pois as bolhas dos niveis manifestarão des-

vios tanto maiores quanto menos firme fôr o terreno. Estes desvios são às vezes completamente inadmissíveis em observações delicadas.

Quando os theodolitos são de primeira classe, não costumam ter tripé de madeira, havendo necessidade de montal-os sobre pilares de alvenaria ou cantaria, os quaes terão um alicerce fundo e completamente isolado do terreno circumjacente, para evitar que as vibrações d'este se lhe communiquem. Se tal isolamento não poder conseguir-se, convirá então assentar em torno um sobrado de peças de madeira por tal modo dispostas que os pontos de apoio no terreno fiquem afastados da base do pilar. Estas precauções são indispensaveis, não só pela delicadeza das observações que devem esperar-se d'estes instrumentos, mas também porque, estando muitos d'elles privados de oculo *fiel*, não haverá modo de bem conhecer os desvios resultantes das oscilações do terreno em que assentam. Em todo o caso, nunca deverá começar-se o trabalho da medição de angulos sem que o pilar recentemente construido se consolide, e sem que as peças que servem de immediato apoio ao theodolito estejam solidamente ligadas áquelle. Estas peças costumam consistir geralmente em placas de cobre que se ajustam sobre o pilar por meio de argamassa ou de enxofre derretido. Nos grandes theodolitos de Troughton é um pesado argolão de ferro o primeiro que se assenta, levando por cima uma peça triangular em que se apoiam os tres parafusos nivelantes; a peça firma-se ao argolão por meio de outros tres fortes parafusos que operam horizontalmente.

Logo que o pilar esteja construido, deverá armar-se em torno uma barraca de abrigo para as observações, a qual costuma geralmente ser de madeira e ferro com revestimento de lona e vidraças corrediças. O tecto deverá ter a fórmula pyramidal ou de cunha para o facil escoamento das aguas pluviaes, podendo descobrir-se na execução das observações astronomicas. As vidraças são lateraes e concorrem para a egual entrada da luz, evitando as fortes corren-

tes de ar; depois de abertas, facultam a passagem do raio visual no acto das poutarias.¹

Quando as observações a fazer são de pequena importancia ou os instrumentos menos delicados, é costume empregar-se em vez de barraca um grande chapeo de sol convenientemente fixo ao terreno e amarrado com tres ou quatro espias. Se o theodolito é de terceira classe, bastará um chapeo de sol ordinario, seguro pelas mãos de um servente. Porém, em todo o caso, o abrigo é indispensavel, se quizermos obter resultados de alguma segurança. Deve existir sempre na mente dos observadores que a acção dos raios do sol é um dos maiores inimigos das boas medições. A sua influencia nociva manifesta-se mesmo atravez das paredes da barraca; e por isso os dias bruscos com horizontes descobertos, ou de nuvens altas são quasi sempre os melhores para as observações terrestres de alta geodesia. Se poderem empregar-se reverberos, as observações feitas de noite serão as melhores.

18. Das rectificações.— Ainda que no acto de observar os angulos possa tomar-se nota do estado do theodolito, corrigindo-se depois os resultados por meio das regras anteriormente expostas (n.º 14 e 15), ou mesmo, segundo o costume, quando os effeitos dos erros instrumentaes fiquem destruidos pelas *observações encruzadas*, será sempre necessario proceder a varias rectificações do instrumento para que se tornem pequenos os erros que devem ser correctos ou eliminados; pois, no caso contrario, ficará, as mais das vezes, alguma duvida sobre o seu inteiro desapparecimento, que exigiria, ou dados completamente exactos, ou a inversão *perfeita* das partes moveis do theodolito, o que envolve a condicção irrealisavel da rigidez ab-

¹ Às vezes a configuração ou a natureza do terreno exige a collocação dos theodolitos sobre altos palanques de madeira. N'estes casos o emprego de um oculo como fiel é indispensavel, mesmo nos pesados instrumentos de primeira classe.

soluta dos metaes. Além d'isto, algumas das formulas de correcção são fundadas principalmente no pequeno valor das incognitas e dos dados da experiencia, e só n'esta hypothese é que resultará a certeza da proficuidade do seu emprego dentro dos limites praticos.

Quando operarmos com theodolitos de segunda e terceira classe deve ser ainda maior o cuidado com as rectificações, porque dependerá d'ellas o valor mais ou menos exacto dos angulos observados, visto não se prestarem alguns d'estes instrumentos, principalmente os de terceira classe, á eliminação mechanica ou ao calculo directo dos erros. E até, no caso de se prestarem, não valeria a pena, em certas circunstancias, o emprego de taes methodos.

Demonstrada a necessidade das rectificações, vejamos qual a sua natureza e o modo de as levar a effeito.

Uma das principaes condicções do theodolito é a *verticalidade do eixo do circulo de azimuths e a horizontalidade do eixo do circulo vertical*; isto é, as direcções dos eixos dos dois circulos devem ser perpendiculares uma á outra, e confundir-se a do azimuthal com a linha de prumo. Nos theodolitos de primeira classe costuma obter-se esta condição por meio do grande nivel dos munhões do circulo vertical, nivel que pode apoiar-se nos mesmos durante o tempo necessario, guardando-se depois na respectiva caixa. A manobra é do modo seguinte: dá-se á linha de alidade do circulo de azimuths uma posição tal que o eixo dos munhões fique paralelo, quanto possivel, á linha que liga dois quaesquer dos parafusos nivelantes em que assenta o instrumento; depois, sem deslocar mais o eixo, colloca-se sobre elle o nivel cuja bolha de ar se reduz ao meio do tubo, empregando os ditos dois parafusos inferiores. Feito isto, inverte-se o nivel sómente, ficando o eixo firme, e examina-se se houve desvio na bolha. Não a havendo, teremos a certeza de que o proprio nivel está rectificado, e horizontal a parte superior dos munhões e a linha que representa o eixo dos mesmos, se forem de egual diametro. Porém, se houver desvio na bolha, desfaremos metade com os dois

parafusos nivelantes inferiores e a outra metade com os parafusos rectificadores do proprio nivel. Deve haver n'isto o maior cuidado.

Repetindo estas operações algumas vezes, conseguiremos o fim desejado. Inverte-se depois o systema por fôrma que a alidade azimuthal tome uma posição diametralmente oposta: se o nivel se conservar calado, serão perpendiculares os dois eixos principaes do instrumento, porém se houver desvio, desfaremos metade com os mesmos parafusos inferiores e a outra metade com o parafuso especial que costuma estar annexo a uma das chumaceiras em que assentam os munhões e que a faz elevar ou descer. Obtida assim a rectificação do nivel e o perpendicularismo dos eixos, collocaremos a mesma alidade n'uma posição perpendicular á primeira, por fôrma que a projecção do nivel corte em angulo recto a linha que une os dois parafusos nivelantes que já considerámos; n'esta posição reduz-se a bolha ao meio do tubo com o terceiro parafuso nivelante, e, verificando assim o nivel nos dois sentidos encruzados, conseguiremos que elle, sempre apoiado nos munhões, se conserve sensivelmente calado. Mas ao proprio nivel tinham sido feitas as rectificações necessarias; portanto a sua bolha de ar conservando-se firme nas direcções encruzadas, indica-nos a horizontalidade e a verticalidade dos dois eixos referidos.

Uma das rectificações do nivel movel de que tratamos, é aquella pela qual se reduz a ser rigorosamente paralelo ao eixo em que se apoia ou suspende; a inversão do nivel sobre os munhões não é sufficiente, pois esta e o eixo podem estar horizontaes e não serem parallelos entre si, ou não estarem no mesmo plano. Para que esta condição exista é necessario que, além da rectificação obtida pela inversão do nivel, a bolha d'este se conserve firme, quando, estando elle apoiado sobre os munhões do eixo, lhe dermos um pequeno movimento giratorio lateral, ou em direcção perpendicular ao mesmo eixo. Dois pequenos parafusos oppostos, que operam horizontalmente servem para dar ao tubo a

conveniente posição parallelá, o que se conseguirá por meio de algumas tentativas.

Cumpre advertir, que para mais facil execução d'estas rectificações importantes devemos collocar logo o instrumento n'uma posição proximamente normal empregando os niveis, ainda mesmo grosseiramente rectificados; depois, proseguir-se-ha com todas as regras e cautelas prescriptas. Porém nos instrumentos de primeira classe, em que os mesmos niveis são extremamente delicados ou sensiveis, quasi nunca poderá conseguir-se que a sua bolha permaneça sempre calada, contentando-nos que ella só se afaste entre estreitos limites, e corrigindo-se depois pelo calculo a influencia d'esses pequenos desvios.

Nos theodolitos de segunda e terceira classe poucas vezes existe nivel movel para os munhões. Sobre o limbo azimuthal é que se encontram geralmente dois niveis formando entre si um angulo recto. O processo do horizontalismo é o mesmo: girando com a alidade azimuthal, colloca-se um dos niveis na direcção dos dois parafusos nivelantes e reduz-se por meio d'elles a bolha ao meio do tubo; depois inverte-se de 180° a posição da alidade, e, se a bolha se deslocar, corrige-se metade dos desvios com os parafusos do proprio nivel e a outra metade com os dois nivelantes, Rectificado um dos niveis, pode nivelar-se o limbo, e em seguida facilmente se rectificará o outro nivel, pois basta andar com os parafusos d'elle até que a bolha occupe o meio.

Esta operação produzirá sómente o horizontalismo do limbo de azimuths e por consequencia e verticalismo do respectivo eixo, pois partimos da hypothese de que o limbo lhe é perpendicular. Resta-nos ainda, no caso dos theodolitos que agora consideramos, conseguir o horizontalismo do eixo sobre que gira o oculo, isto é, do eixo dos munhões. O fio de prumo, a aresta vertical de um edificio, estão geralmente em uso para este fim: nivela-se bem o azimuthal e aponta-se com o centro do reticulo do oculo á parte superior do fio ou aresta; depois faz-se girar doce-

mente o oculo só na direcção vertical. Se o centro do reticulo (ou o seu encruzamento) se não afasta da linha escolhida, está horizontal o eixo, e mesmo não haverá erro sensível de collimação; se houver desvio em fôrma de curva poderá existir este erro; se o desvio se manifestar n'uma recta obliqua haverá só defeito de horizontalismo. Será pois conveniente corrigir primeiro o *erro de collimação*.

Em todos os theodolitos de que temos conhecimento, o erro de collimação corrige-se com os parafusos que fazem mover a chapa ou diafragma que sustenta o reticulo. Apon-ta-se com o centro d'este a um objecto muito distincto, in-verte-se o oculo nas chumaceiras, isto é, debaixo para cima, havendo todo o cuidado para se não darem choques que podem produzir desvios azimuthaes; se o objecto escolhido continuar a projectar-se no centro do reticulo não ha erro sensível de collimação; mas se houver desvio horizontal re-presentará elle o dobro do erro, que se corrigirá alargando um dos ditos parafusos e apertando o opposto. É facil co-nhecer qual dos parafusos se deve alargar ou apertar.

Se o oculo poder inverter-se com o seu giro ordinario, passando pelo zenith ou pelo nadir, bastará apontarmos ao mesmo objecto nas duas posições oppostas de 180° em azimuth, e fazer nos nonios ou microscopios as respectivas leituras; a semi-differença d'ellas dará (n.º 14) o effeito do erro de collimação, e se o ponto observado estiver no hori-zonte dará a propria collimação, que poderemos corrigir sensivelmente com os parafusos do reticulo.

Quando o oculo pode girar em torno do seu eixo longi-tudinal, como acontece nos theodolitos de segunda classe de Troughton, a centralisação dos fios é facil, pois que, praticando o giro, veremos se o encruzamento do reticulo se projecta sempre no mesmo ponto externo a que tenha-mos dirigido a pontaria, e, não se projectando, corrigire-mos primeiramente metade do desvio azimuthal e depois metade do vertical, ou vice-versa, com os respectivos para-fusos do diafragma. Devemos porém considerar que n'este caso especial pode o reticulo ficar bem central e continuar

a existir erro de collimação, por não ser o eixo dos munhões exactamente perpendicular á direcção do eixo do oculo. O conhecimento da collimação exige o emprego de qualquer dos dois methodos atraz mencionados.

Voltando agora á rectificação do horizontalismo do eixo dos munhões nos theodolitos que não teem nivel proprio, já vimos como a aresta vertical de um edificio ou um fio de prumo nos podem dar a conhecer o sentido da inclinação, a qual corrigiríamos com aquelles parafusos que fazem variar verticalmente a posição das chumaceiras em que assenta o eixo. É certo que alguns theodolitos não teem estes parafusos, e portanto a rectificação será impossivel, contentando-nos com a mão de obra do constructor do instrumento; porém se em taes circumstancias quizermos obter nos angulos horizontaes certo grau de precisão, teremos que praticar a inversão do oculo e tomar a média de duas observações conjugadas (directa e inversa), sobretudo se os pontos observados tiverem entre si grandes differenças de nivel (n.º 14).

Tambem devemos ponderar que o emprego do fio de prumo ou da aresta do edificio não é isento de defeitos e difficuldades. O fio de prumo deve ser mui fino e sem oscillação alguma; portanto só dentro de um edificio aonde não haja correntes de ar é que poderemos usar d'elle, e ainda assim convirá mergulhar n'um vaso de agua o peso que o distende, para amortecer as oscillações. A aresta do edificio poucas vezes será exactamente vertical. Um dos mais seguros meios de rectificação seria certamente o seguinte: apontar com o centro do reticulo a um ponto elevado e muito distincto, depois, tendo o systema azimuthal bem firme e nivelado, girar com o oculo verticalmente até descrever um grande arco e marcar junto ao terreno o logar em que se projecta o mesmo ponto do reticulo; em seguida inverter o oculo nas chumaceiras, de traz para deante, tornar a dirigir a pontaria ao ponto superior e descer novamente o oculo até á mesma linha horizontal do terreno, marcando novo logar. Se os dois logares coincidirem,

estarão no plano vertical que passa pelo oculo e ponto superior: portanto o eixo de rotação estará de nivel. Se houver desvio, marca-se na mesma horizontal o logar medio e move-se a chumaceira até que o centro do reticulo se projecte n'este logar e no ponto superior, dando ao oculo o necessario movimento em altura.

Havemos pois indicado os meios de reduzir os dois eixos principaes do theodolito á sua posição normal e de anular directamente o erro de collimação. Como rectificação importante, temos ainda a tratar do nivel superior, paralelo ao circulo vertical.

A rectificação d'este nivel, quando preso a uma das columnas que sustentam o eixo dos munhões, nada tem de notavel: colloca-se a alidade azimuthal por fórma que ella fique em direcção proximamente parallela á linha recta que é determinada por dois quaesquer dos parafusos nivelantes inferiores, reduz-se com estes a bolha do nivel ao meio e inverte-se depois o systema; o desvio que se manifestar será destruido, metade com os ditos parafusos nivelantes, e a outra metade com os que subjeitam a armação do nivel. É este um processo analogo ao já referido e por isso não precisa de mais explicações.

Nos theodolitos inglezes de segunda classe costuma o nivel de que tratamos estar fixo ao oculo por meio de dois parafusos verticaes, nas extremidades, existindo n'uma d'estas outros dois em direcção horizontal e opposta, para destorcer o nivel ou reduzi-lo ao plano do eixo do oculo. Primeiramente nivela-se o azimuthal e fixa-se a respectiva alidade; depois faz-se mover o vertical até que a bolha do nivel fique a meio do tubo, tendo sido previamente abertas as virolas que cingem o oculo nas chumaceiras; gira-se um pouco sobre estas, docemente, com o mesmo oculo, e examina-se a bolha. Não havendo deslocamento longitudinal, está o eixo do nivel no mesmo plano do eixo do oculo; mas se houver deslocamento, corrigir-se-ha com os parafusos respectivos como atraz fica dito. Finalmente, para que os ditos eixos, além de existirem no mesmo plano, sejam pa-

rallelos, inverte-se o oculo sobre as chumaceiras, e se a bolha do nivel não occupar sempre a mesma posição central, corrige-se metade do desvio com os parafusos que prendem o nivel ao oculo e a outra metade com o parafuso ajustante do circulo de alturas, ou com um dos parafusos nivelantes inferiores, tendo previamente collocado o oculo na direcção d'elle¹.

A inclinação do eixo dos munhões e o erro de collimação que já sabemos determinar e corrigir pelos processos ordinarios, pode tambem destruir-se ou avaliar-se por meio de um horizonte artificial. Effectivamente alguns theodolitos de primeira classe andam munidos de uma caixa circular amovivel, dentro da qual existe o que se chama *banho de mercurio*. Este banho constitue um espelho perfeitamente horizontal. Vejamos o seu emprego.

Tendo-se voltado o oculo para o nadir, depois de collo-

¹ Todas estas manobras devem fazer-se docemente para que as chumaceiras em que assenta o oculo se conservem firmes, convindo ler o nonio do vertical, que nos servirá de fiel da immobildade do mesmo. E já que fallamos d'esta parte dos theodolitos inglezes, advertiremos que o limbo de alturas costuma ter na face opposta á da graduação ordinaria, outra graduação, tambem para um e outro lado do zero, com divisões successivamente menores até ao numero 30, sendo as duas primeiras subdivididas geralmente em quatro partes. O distico *Diff. of Hypo. & Base*, que acompanha esta graduação especial, indica bem o seu fim. Serve pois de obter immediatamente a redução de uma distancia ao horizonte. As divisões estão calculadas para 100 unidades lineares: assim, tendo sido dirigida a pontaria a um objecto distante 100 metros, e indicando o indice d'este limbo especial o numero 24 (depois de nivelado o azimuthal), será

$$\text{distancia reduzida ao horizonte} = 100 - 24 = 76 \text{ metros.}$$

Podem, por estimativa, avaliar-se os decimos; e quando as distancias forem inferiores ou superiores a 100 unidades, uma simples regra de proporção dará o valor desejado.

Nos theodolitos de terceira classe cujo limbo de alturas constar de dois segmentos oppostos, costuma existir n'um dos segmentos a graduação especial de que tratamos.

cada n'essa direcção a caixa do mercurio, a descoberto, acontecerá que, se não houver erro de collimação nem inclinação do eixo, a imagem directa do ponto central do reticulo poderá sobrepor-se exactamente á imagem reflectida pelo banho; se acontecer o contrario, as duas imagens, no campo do oculo, serão sempre vistas mais ou menos afastadas uma da outra, correspondendo o minimo afastamento ao ponto em que o oculo (ou a linha de collimação) passa pelo plano vertical do eixo dos munhões. Este afastamento minimo é devido, em parte ao erro de collimação e em parte á inclinação do eixo dos munhões. Quando o reticulo é como os de Repsold, podemos considerar o desvio nos fios verticaes.

A distancia angular do ponto ou do fio central do reticulo á sua imagem é o dobro da que separa da vertical o mesmo ponto ou fio; e se a ocular do instrumento estiver munida de parafuso micrometrico, pode medir-se esta distancia fazendo coincidir successivamente o fio movel com o medio e sua imagem.

Sejam:

I... a inclinação da aresta superior dos munhões do eixo horizontal, que já sabemos obter pelo nivel;

k... a desigualdade dos munhões expressa em arco, que tambem já sabemos obter;

c... o erro de collimação;

Δ ... a distancia angular do fio ou ponto central do reticulo á sua imagem reflectida; teremos evidentemente, contando as inclinações para o mesmo lado,

$$\frac{1}{2}\Delta = I + k - c$$

Se $(I + k)$ forem previamente conhecidos, obter-se-ha por esta formula o erro de collimação, e *vice-versa*.

Querendo o observador inverter o instrumento nas chumaceiras, e chamando Δ a nova distancia angular medida

no micrometro, resulta:

$$\frac{1}{2}\Delta' = -I + k - c$$

As duas equações dão

$$k - c = \frac{1}{4}(\Delta + \Delta')$$

$$I = \frac{1}{4}(\Delta - \Delta')$$

Portanto, sendo conhecido o valor de k , podemos por observações feitas nas duas posições oppostas do circulo vertical determinar ao mesmo tempo I e c .

Nos theodolitos, mesmo sendo de primeira classe, não existe muitas vezes o apparelho micrometrico na ocular, porém, ainda assim, pode determinar-se o erro de collimação, quando conhecidos os valores de I e k . Effectivamente, uma das chumaceiras em que assentam os munhões pode elevar-se ou abaixar-se, por meio do parafuso annexo, até que a imagem reflectida do reticulo coincida com a imagem directa. N'este caso $\Delta = 0$, e por consequencia

$$c = I + k$$

Para poder-se distinguir a imagem reflectida pelo mercurio, é necessario que a luz incida sobre o banho, de tal sorte, que os fios do reticulo se destaquem sobre um fundo brilhante. Consegue-se isto substituindo a ocular ordinaria por uma ocular especial chamada *de collimação* ou *microscopio nadiral*, que consiste n'um microscopio ordinario tendo junto e em frente da propria objectiva um espelho de aço polido com a fôrma de diafragma varado no centro para poder descobrir-se a objectiva do oculo, para a qual o mesmo espelho envia, dando-se-lhe a inclinação conveniente, os raios emanados de um foco luminoso. Se não fôr commoda ou conveniente a substituição da ocular ordinaria, pode-se collocar sobre ella uma lamina reflectidora ou um

prisma que, sem interromper a visão directa, faça, tendo a inclinação necessaria (geralmente 45°), reflectir a luz para o mercurio. As laminas de mica são muito empregadas para este fim e collocam-se n'um pequeno caixilho a que se podem dar todos os movimentos para que o campo luminoso da superficie do mercurio tenha a posição conveniente á visibilidade dos fios.

O emprego do banho de mercurio nos trabalhos de campo offerece bastantes difficuldades. Primeiramente é necessario que a superficie reflectidora esteja inteiramente isenta de quaesquer impurezas, o que até certo ponto se pode conseguir limpando-se amiudadas vezes com um pouco de algodão embebido de algumas gottas de alcool, ou empregando um reservatorio da fôrma de um tinteiro de bomba. No reservatorio move-se um embolo que faz entrar e subir o mercurio na caixa, por fôrma que todas as impurezas ficam depositadas, formando-se n'esta uma superficie inteiramente limpa.

Outra difficuldade provém das trepidações que se manifestam no banho, por causa das correntes atmosfericas. O espaço em que existe o banho de mercurio mal pode resguardar-se com um vidro superior, pois não convém que entre a superficie reflectidora e o oculo se interponha outro corpo que possa fazer desviar o raio visual: por consequencia qualquer disequilibrio na atmosphaera tornará imperfeita ou impossivel a visibilidade da imagem reflectida dos fios.

Os grandes theodolitos de primeira classe de Troughton são, algumas vezes, munidos de um *collimador vertical* collocado no centro do circulo de azimuths. O ponto de mira consiste no encruzamento de dois fios de aranha. Um reflectidor lateral, collocado por baixo do prato do limbo, produz a illuminação do campo do collimador com a luz do dia, ou, de noite, com a luz de uma lanterna. Os fios podem assim ver-se distinctamente. A inversão azimuthal de 180° , depois de voltado o oculo para o collimador e estar o limbo bem nivelado, nos fará conhecer o desvio lateral entre os centros dos respectivos reticulos, desvio que será correcto,

metade com os parafusos do reticulo do oculo, e a outra metade com os do collimador. O centro d'este funcionará pois como um ponto de mira fixo, e pode servir não só para corrigir o erro de collimação, mas tambem para determinar no limbo de alturas a graduação do nadir, empregando para isto duas observações encruzadas.

Em alguns theodolitos de Troughton de terceira classe, muito empregados entre nós, o nivel do vertical é independente do oculo, e portanto rectifica-se pelo modo ordinario; comtudo, não sendo possiveis as observações encruzadas (directa e inversa), é necessario que, estando calado o dito nivel e a alidade no zero, seja horizontal a linha de mira indicada pelos fios do reticulo do oculo. Esta rectificação só pode conseguir-se determinando previamente no exterior dois pontos de nivel; pois, se collocarmos o theodolito n'um d'elles e dirigirmos o oculo para o outro, estando os niveis calados e a alidade vertical no zero, facilmente ajustaremos o centro do reticulo n'este segundo ponto de mira por meio dos parafusos que subjeitam o diafragma a que os fios estão presos.

A escolha dos dois pontos de nivel é facil: colloca-se o theodolito a egual distancia de duas miras ou estacas verticaes, em terreno pouco inclinado; acerta-se o nonio do vertical em uma determinada graduação (geralmente o zero) e, estando os niveis calados, dirige-se a pontaria a uma das estacas e depois á outra, sem alterar em nada a indicação do nonio, e marcam-se os pontos de mira, os quaes evidentemente estarão de nivel. Depois, transportando o instrumento para junto de uma das estacas, praticar-se-ha a rectificação como fica dito.

Com o que acabamos de indicar ácerca das rectificações, e com o que expozemos nos outros artigos, julgamos o observador habilitado a poder empregar o seu theodolito nas medições angulares, de cujo mechanismo nos vamos occupar em seguida¹.

¹ Os que desejarem estudar especialmente os theodolitos de Trou-

19. **Processo systematico da medição dos angulos.**— Collocado o instrumento em estação e rectificado segundo as necessidades do serviço, é necessario determinar as suas relações com o ponto ou pontos de referencia que estiverem junto d'elle. Estes pontos, ou existem na vertical do centro do theodolito ou n'um signal permanente collocado nas suas proximidades. No primeiro caso ficará no terreno uma estaca, um buraco cylindrico cheio de carvão ou uma grande pedra, solidamente estabelecida, na qual se abrirá a referencia. No segundo, ficará esta no centro de uma grande pyramide de alvenaria, no vertice de uma torre, ou emfim n'um ponto distincto de qualquer edificio, mas sempre de modo que a direcção azimuthal e a distancia, em relação ao lugar do instrumento, possa determinar-se com todo o rigor necessario. Não entramos nos processos d'estas determinações, porque, além de mui faceis e conhecidas, são alheios ao nosso estudo. Devemos comtudo dizer que nos trabalhos de alta geodesia o numero de referencias não pecca por excessivo, sendo umas no sentido horizontal, outras em altura. Só assim poderá em qualquer tempo retomar-se a antiga posição do theodolito. Na pesquisa d'estes elementos de redução cumpre que haja toda a cautela para que não resultem enganos, e para que exista harmonia de precisão entre os ditos elementos e as observações angulares: seria contraproducente fazer com o instrumento operações para alcançar resultados com uma aproximação de centesimos de metro e desprezar esses centesimos nas medidas de que estamos tratando.

Suppondo, pois, tudo preparado, entremos nos methodos de observação, segundo a natureza dos theodolitos e os fins que se tiverem em vista. Em primeiro lugar serão tratadas as observações geodesicas de primeira ordem com theodo-

ghton, Repsold e Gambey, podem consultar os *Apontamentos de geodesia theorico-pratica* do fallecido general J. M. Cabral Calheiros, que foi lente da Escola do Exercito e nosso presado amigo. Ahi existem com a maior clareza e nitidez os desenhos d'estes instrumentos.

litos reiteradores de primeira classe; depois as secundarias, com theodolitos repetidores de segunda classe; finalmente as observações mais expeditas com theodolitos de terceira classe.

1.º Antes do começo das observações azimuthaes ou da medição dos angulos com o circulo de azimuths, convém escolher de entre os pontos p que devem ser observados aquelle p_1 que fôr de visibilidade mais distincta e permanente; dirige-se-lhe a pontaria com o ponto central do reticulo do oculo e fixa-se a alidade do respectivo limbo. Depois, dando a este um movimento giratorio por meio de algum esforço manual, obtem-se a proxima coincidencia do *index* com o intervallo da graduação entre 0° e 1° , por fôrma que a leitura seja $< 1^\circ$ e $> 0^\circ$.¹

Podendo haver com esta manobra qualquer desarranjo no systema, convém nivelar de novo o instrumento ou verificar se permanece nivelado, tendo a cautela de apertar sempre as porcas dos parafusos inferiores que sustentam o systema, para evitar quanto possivel que haja laqueação. Se existir oculo que sirva de fiel, dirigir-se-ha a um ponto perfeitamente distincto e sem phase sensivel. Renova-se a pontaria a p_1 com todo o disvello, fazendo o ajustamento por meio dos parafusos respectivos, porém de modo que o movimento lento azimuthal do oculo seja sempre no sentido da graduação do limbo. Em seguida rectifica-se a leitura do *index* que deverá ser $0^\circ + n$ divisões minimas, passando-se á leitura do primeiro microscopio micrometrico ou nonio, o qual designaremos por I, e depois ao microscopio ou nonio II. Se houverem mais microscopios micrometricos ou nonios, serão lidos successivamente. Nas leituras devem ter-se presentes os preceitos já estabelecidos (n.º 5 e 6).

Feito o registro relativo ao primeiro ponto p_1 dirige-se pelo mesmo modo a pontaria ao ponto p_2 immediato no giro de horizonte e praticam-se egualmente as leituras e regis-

¹ É assim que se pratica com os theodolitos de Repsold; nos de Troughton faz-se primeiro a coincidencia do *index*.

ro. Assim se vae continuando até ao ultimo ponto p_n , movendo sempre o oculo docemente na direcção progressiva da graduação do limbo de azimuths e fazendo em igual sentido os ajustamentos.

Logo que esteja completo este giro progressivo, avança-se com o systema movel, azimuthalmente, um pouco além do ultimo ponto, e depois volta-se a elle de novo, mas com movimento retrogado, executando todos os deslocamentos rapidos e lentos em sentido contrario á graduação, ou opposto aos movimentos do giro progressivo; fazem-se as leituras e registros; passa-se ao ponto p_{n-1} , etc., até voltar ao inicial p_1 , praticando sempre o observador operações analogas com a maior cautela.

Terminados os dois giros, progressivo e retrogado, inverte-se o oculo de 180° e torna-se a apontar ao ponto p_1 , para o que a alidade azimuthal tem de descrever tambem um arco de dois angulos rectos. Seguem-se as pontarias com movimento progressivo aos pontos $p_2, p_3 \dots p_n$ e depois, com movimento retrogrado, aos pontos $p_n \dots p_3, p_2, p_1$, executando-se continuamente os mesmos preceitos estabelecidos para os dois primeiros giros, não havendo, contudo, necessidade de fazer leituras do index, que já foram feitas, mas só as dos micrometros ou nonios.

Quando existe oculo fiel, devemos certificar-nos em cada pontaria se houve ou não deslocamento no systema, para se desprezarem as observações no caso de ser sensivel o desvio.

A média das leituras, respectivas ás quatro pontarias a cada ponto $p_1, p_2 \dots p_n$, dará a direcção de cada um em relação ao zero do limbo, correcta dos erros de collimação, de horizontalismo do eixo dos munhões, da excentricidade do limbo e do oculo, e, até certo ponto, dos que podem provir da torção ou laqueação do systema fixo e das reacções do parafuso ajustante da pontaria, (n.^{os} 11, 12 e 14). E se a cada direcção $p_2, p_3, \dots p_n$ subtrahirmos a do primeiro ponto p_1 , teremos as mesmas direcções referidas a este ponto como zero ou origem. Todo o conjuncto em média,

constitue uma observação systematica para qualquer dos pontos, a qual poderá tomar-se como *unidade de peso*.

Desloca-se depois o zero do limbo de uma quantidade tal que esteja em harmonia com o numero de reiterações ou unidades de peso que é necessario obter; mas estando geralmente adoptada a hypothese de que os erros de divisão seguem uma lei expressa pelos senos e cosenos dos arcos multiplos, convirá que as reiterações se façam em arcos submultiplos de 90° ou 180° conforme o numero de nonios ou de microscopios micrometricos fôr 4 ou 2, como já dissemos.

Suppondo o numero 2 (caso mais geral dos theodolitos) será bastante que o index, quando o oculo estiver voltado para o ponto inicial ou p_1 , occupe successivamente as posições do limbo entre 0° e 1° , 15° e 16° , 30° e 31° , 45° e 46° , 60° e 61° , 75° e 76° , 90° e 91° , 105° e 106° , 120° e 121° , 135° e 136° , 150° e 151° , 165° e 166° . Haverão assim 12 reiterações ou mudanças de origem, o que as mais das vezes é sufficiente para os casos da alta geodesia. Comtudo se as circumstancias exigirem um maior numero de unidades de peso, é certo que poderá augmentar-se quanto se queira¹.

A marcha subsequente das observações não offerece variantes: aponta-se ao ponto inicial p_1 e faz-se coincidir o *index* entre as divisões 15° e 16° ; verifica-se o nivelamento, rectifica-se a pontaria ao ponto inicial; e prosegue-se exactamente como atraz fica dito. Os modelos n.º 1 e n.º 2, representam: o primeiro, a disposição do registro das observações; e o segundo a tabella das direcções finaes obti-

¹ O sr. general Philippe Folque nas suas *Instrucções sobre o serviço geodesico de primeira ordem* não seguiu rigorosamente estes principios, ordenando a reiterações de 24 em 24 graus, desde 0° até 336° . Julgamos que os inconvenientes d'ahi resultantes serão de mui pequena monta, attendendo á boa graduação actual dos limbos; comtudo o methodo que expozemos no texto pareceu-nos mais em harmonia com a pratica geralmente seguida e com as indicações da sciencia.

das n'uma estação e referidas a um dos pontos observados, como origem.

Quando as direcções ou unidades de peso, apresentarem erros notorios de observação, devem ser desprezadas e substituidas por outras, medidas novamente.

Modelo n.º 1

Estação : Marão (Pyramide)
Data : 10 de agosto de 1880

Instrumento : Repsold n.º 4
Posição : 1.^a

Princ. 7 ^h . 30 ^m . Fim 10 ^h . 40 ^m	HORAS	PONTOS OBSERVA- DOS E NOTAS	MOVIMENTOS	GRAUS E DIVISÕES	MICROMETROS								MÉDIA FINAL	DIRECÇÕES					
Montemuro (Pyramide) Regular	DP	0° 3	1. 68,2 68,4	68,3	I				II				0° 35'. 43'',04	0° 35'. 17'',24	0° 35'. 30'',14	0° 0'. 0'',00			
					DR	67,6 68,4	68,0	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r					p	$\frac{1}{2} S$	"
IP	73,6 73,8	73,7	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"									
IR	74,0 73,6	73,8	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"									
$\Sigma(p)$	283,8	232,8																	
$\frac{1}{4} \Sigma(p)$	71,0	58,2																	

S. Pedro Velho (Pyramide) Regular	DP	23° 4	2. 8,7 9,3	9,0	23° 46'. 59'',88	1. 98,5 98,0	98,2	23° 46'. 43'',67	23° 46'. 51'',78	23° 41'. 21'',64											
											DR	8,8 9,6	9,2	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"
IP	9,2 10,0	9,6	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"											
IR	9,6 9,4	9,5	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"											
$\Sigma(p)$	37,3	5,0																			
$\frac{1}{4} \Sigma(p)$	9,3	1,3																			

Santo Ovidio (Heliotropo) Bom	DP	60° 2	1. 30,8 30,3	30,6	60° 24'. 32'',63	1. 30,0 30,0	30,0	60° 24'. 25'',71	60° 24'. 29'',17	59° 48'. 59'',03											
											DR	31,4 30,0	30,7	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"
IP	41,3 41,2	41,3	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"											
IR	40,7 40,8	40,8	r	p	$\frac{1}{2} S$	"	r	p	$\frac{1}{2} S$	"											
$\Sigma(p)$	143,4	130,0																			
$\frac{1}{4} \Sigma(p)$	35,9	32,5																			

Observador : BRITO LIMPO

As letras *r* e *p* designam as revoluções ou voltas do tambor de cada micrometro, as quaes são depois reduzidas a minutos e segundos por meio das respectivas taboas (n.º 10). As abreviaturas *DP*, *DR*, *IP*, *IR* designam os movimentos: directo progressivo, directo retrogrado, inverso progressivo, inverso retrogrado.

Modelo n.º 2

Estação: Marão (Pyramide)

Instrumento: Repsold n.º 4

DATAS	MONTEMURO Pyramide	S. PEDRO VELHO Pyramide	SANTO OVIDEO Heliotropo
1880			
Agosto 10—10 ^h . 40 ^m	0°. 0'. 0'',00	23°. 11'. 21'',64	59°. 48'. 59'',03
11 . 0	0 ,00	21 ,33	53 ,92
11 . 46	0 ,00	25 ,93	55 ,33
Setembro 1—10 . 40	0 ,00	23 ,33	53 ,50
12 . 8	0 ,00	23 ,04	55 ,82
etc.	etc.	etc.	etc.
Médias (de 5 direc.ªs)	0°. 0'. 0'',00	23°. 11'. 23'',05	59°. 48'. 55'',52

Observador: BRITO LIMPO

É certo que a execução fiel d'este systema offerece algumas difficuldades praticas, por causa de não serem sempre visiveis ou perfeitamente visiveis os pontos que devem ser observados. Se uma das quatro pontarias falha, temos que desprezar as restantes, o que envolve uma consideravel perda de trabalho. Por isso muito geographos (quasi todos), partindo do principio de que o theodolito está bem rectificado, consideram unidade de peso cada uma das quatro pontarias ou direcções simples, deixando para a média final,

ou antes para a direcção que representa o valor mais provavel do conjuncto, a compensação dos erros. Tambem, quando o ponto inicial deixa de ser visivel, não interrompem por tal motivo as observações; escolhem para origem outro de entre os pontos observados. O modelo n.º 2 será então preenchido pelo modo seguinte:

Estação : Serves (Pyramide)

Instrumento : Troughton n.º 2

DATAS	ALMEIRIM Pyramide	OBSERVATORIO DO CASTELLO Signal	MONGE Pyramide
1864			
Agosto 24—8 ^h . 50 ^m	0°. 0'. 0'',00	132°. 44'. 40'',90	188°. 51'. 30'',03
	0 ,00	40 ,13	33 ,15
	0 ,00	50 ,55	—
	0 ,00	44 ,20	—
2 . 30	—	0 . 0 . 0 ,00	56 . 6 . 48 ,63
	—	0 ,00	50 ,00
	—	0 ,00	50 ,65
	0 ,00	132 . 44 . 41 ,25	—
25—9 . 30	0 ,00	41 ,88	188 . 51 . 29 ,00
	0 ,00	40 ,33	29 ,70
	0 ,00	46 ,75	33 ,00
	0 ,00	44 ,62	—
etc.	etc.	etc.	etc.

Observador : BRITO LIMPO

Este methodo tem a incontestavel vantagem de ser mais expedito; porém não envolve, segundo nos parece, a eliminação dos erros instrumentaes tão completamente como o primeiro que expozemos, e além d'isto, requer um calculo especial em cada estação para serem determinadas as direcções mais provaveis dos differentes pontos com refe-

rencia a um d'elles, calculo que no primeiro systema se reduz a procurar as médias arithmeticas. Comtudo, a visibilidade simultanea e continua de todos os pontos, que hajam de ser observados de uma estação geodesica de primeira ordem, poucas vezes acontecerá durante o tempo necessario para completar os quatro giros, directo progressivo, directo retrogrado, inverso progressivo, inverso retrogrado; e por consequencia talvez convenha tomar um expediente médio, isto é, observar em cada giro de horizonte só aquelles pontos que, na occasião effereçam maiores garantias de visibilidade, mas empregando sempre as quatro pontarias systematicas. Por este modo no decurso de algum tempo poderão ficar observados todos os pontos com o numero de *direcções completas* que se julgar necessario. Tem, é verdade, que fazer-se depois o calculo das direcções mais provaveis, mas fica-se menos sujeito a desprezar grande numero de observações incompletas.

Entre nós seguiu-se por muito tempo o seguinte methodo. O ponto inicial, que toma o nome de *marca*, não pertence ao systema dos pontos p , isto é, permanece extranho á triangulação, servindo só para a elle se referirem as direcções dos outros. Por esta fôrma cada ponto $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ ficará facilmente com egual numero de pontarias, e as médias finaes representarão as suas direcções mais provaveis. Um tal methodo exige que a marca seja mui distincta, de visibilidade constante e sem phase de especie alguma; além d'isto é necessario que as pontarias dirigidas a qualquer dos outros pontos o sejam nas melhores condições, para que possam ter egual peso.

Supposemos o instrumento rectificado sufficientemente: portanto n'estas observações, em que os pontos geodesicos existem na proximidade do horizonte, não será necessario tomar nota de alguns pequenos e inevitaveis desvios da bolha dos niveis que indicam o grau da verticalidade do systema. Mas se os pontos observados tiverem distancias zenithaes mui differentes, como acontece geralmente quando queremos medir o angulo horizontal entre qualquer signal

geodesico e um astro, será quasi sempre necessario ter o grande nivel collocado sobre os munhões do eixo do circulo de alturas para se fazerem amiudadas observações que indiquem o desvio da bolha de ar, observações que serão convenientemente registradas para depois (n.º 14) entrarem como elemento nas formulas da correcção respectiva. (Veja-se a nossa *Memoria sobre a determinação das latitudes geographicas e dos azimuths*).

Passemos agora a tratar dos angulos verticaes.

Se as graduações do zenith, do nadir, ou do horizonte, forem previamente conhecidas, isto é, se no limbo de alturas forem conhecidos os pontos por onde passa a vertical ou a horizontal do seu centro, ou uma linha de posição determinada em relação a estas, não teremos mais do que dirigir a pontaria ao objecto a observar e ler depois nos nonios ou micrometros esta nova direcção. A differença das duas leituras ou indicações do limbo dará immediatamente a distancia zenithal ou a altura do objecto observado. Este processo exige a existencia do horizonte artificial, já descrito, ou a determinação da linha de prumo por duas observações encruzadas; porém, nas operações geodesicas de primeira ordem, segue-se quasi sempre o methodo geral indicado no n.º 15, isto é, dirige-se a pontaria ao objecto, estando o circulo vertical á esquerda, e lê-se no index e nos dois nonios ou micrometros a graduação do limbo, bem como se toma nota da leitura direita e esquerda da bolha do nivel respectivo; em seguida inverte-se o systema e faz-se nova pontaria e identicas leituras, tomando-se tambem nota das indicações do nivel: teremos todos os elementos para deduzir a distancia zenithal pela equação (41).

Escusado seria, talvez, dizer novamente que n'esta manobra julgamos a graduação do limbo correndo da esquerda para a direita (de cima para baixo), para quem estiver voltado para ella. É este realmente o caso mais geral; porém se a numeração das divisões fosse feita em sentido contrario, bastaria só mudar na equação (41) E em D e D em E ,

O seguinte modelo indica o modo de fazer os registros.

As letras *H* e *h* representam as alturas do ponto de mira do signal junto, e do instrumento em relação á referencia do terreno; *B* observação boa, *R* observação regular.

Quando o vertical pode tambem reiterar os angulos, praticam-se as reiterações de um modo analogo ao estabelecido para o limbo de azimuths, e tomam-se tantas distancias zenithaes, ou unidades de peso, quantas forem exigidas pela natureza do serviço. Estas observações, que aqui supomos destinadas á astronomia e geodesia, devem ser feitas nas melhores condições atmosphericas, havendo sempre o cuidado de tomar nota das indicações do barometro e thermometros para corrigir-se o effeito do poder refrangente do ar, se por outros meios não fôr eliminado.

2.º Se com os theodolitos de segunda classe quizessemos proceder a observações pelo methodo das reiterações, não teriamos mais do que pôr em pratica as regras antecedentes, com excepção do numero de direcções a cada ponto, as quaes, n'este caso, seriam em menor quantidade. Quando os instrumentos forem de Troughton, acontecerá quasi sempre terem o oculo amovivel, em chumaceiras especiaes; e por isso, nas observações azimuthaes, além de inverter-se a posição da alidade respectiva é tambem necessario abrir os anneis ou virolas, que subjeitam o oculo, e inverter este de traz para deante.

Pode acontecer muitas vezes que o theodolito seja repetidor, e posto que o methodo das reptições esteja hoje pouco menos de abandonado, ainda ampliaremos alguma cousa o que sobre este assumpto dissemos no n.º 16, tendo em vista as observações em azimuth. Faz-se coincidir exactamente o zero da graduação com o zero do nonio; e, movendo o systema todo, aponta-se ao objecto da esquerda. Quando existe fiel, dirige-se este a um objecto bem distincto. Depois fazem-se as leituras nos dois nonios, das quaes uma já sabemos ser *zero*, e em seguida solta-se a alidade e aponta-se ao objecto da direita; feita a pontaria, basta ler o primeiro nonio ou o que tinha indicado zero na origem, havendo-se previamente examinado o fiel. Volta-se ao

ponto da esquerda sem mecher na alidade, mas sim girando com o systema todo, faz-se pontaria como no principio, dirige-se o fiel, e depois solta-se de novo a alidade para voltar com o oculo ao ponto da direita, examinando-se tambem o fiel. Teremos o angulo duplo; e assim por diante. As leituras poderiam ser feitas só no principio e fim da série, dividindo o ultimo termo pelo numero de repetições e applicando-lhe a respectiva correcção dos nonios, que devem ser lidos *todos* no fim e no começo da operação. Contudo é costume ler o primeiro nonio em cada repetição, ou pelo menos de duas em duas, para nos certificarmos da boa marcha das observações.

O seguinte modelo de registro, em que suppomos só dois nonios, indica o caminho que deve seguir-se.

Modelo n.º 4

Estação: Cabeço-ruivo (Signal)

Data: 18 de setembro de 1873

Pontos observados: Monte Agudo (Signal) e S. Gens (signal)

N.º DAS OBSERVAÇÕES	ANGULOS		NONIOS	
			1.º	2.º
	Multiplos	Simples	Princípio. 0º. 0'. 0'' Fim..... 363 . 4 . 5	180º. 0'. 10'' 4 . 20
1	36º. 18'. 20''	36º. 18'. 20'',0	Corr. dos nonios = $+\frac{2,5}{10}=0'',25$ Ang.º correcto = 36º. 18'. 24'',75	
2	72 . 36 . 45	22 ,5		
3	108 . 55 . 10	23 ,3		
4	145 . 13 . 40	25 ,0	$y = 27^\circ. 15'$ $r = 2^m.36$	
5	181 . 32 . 5	25 ,0		
6	217 . 50 . 25	24 ,2		
7	254 . 8 . 50	24 ,3	Theodolito: n.º 6 Observador: F.	
8	290 . 27 . 15	24 ,4		
9	326 . 45 . 45	25 ,0		
10	363 . 4 . 5	24 ,5		
	etc.	etc.		

O numero das repetições não costuma elevar-se além de 30. É uso ficar entre 10 e 20, sendo este ultimo o adoptado nas antigas observações de primeira ordem.

Continuando a considerar os mesmos theodolitos de Troughton, não offerece difficuldade a manobra para a determinação das alturas e depressões. Rectificado o instrumento, faz-se coincidir o zero do circulo vertical com o zero do nonio, e depois, empregando os parafusos nivelantes que

sustentam o systema, obriga-se a bolha do nivel fixo ao oculo a occupar o meio do tubo respectivo, tendo-se previamente dirigido o plano do mesmo circulo para o objecto ou ponto de mira. O nivel do azimuthal que existe n'uma direcção perpendicular ao systema que nos occupa deve tambem estar calado. Feito isto, dirige-se a pontaria ao objecto, e a leitura do nonio dará a sua *altura* ou *depressão*.

Se o angulo a observar fôr mui pequeno, poderemos obter algumas repetições forçando os parafusos nivelantes e obrigando a bolha de ar dos niveis, que temos considerado, a voltar ao meio dos tubos, sem mecher na alidade, para em seguida tornar a fazer nova pontaria, e assim por deante emquanto possivel¹. Porém este methodo é sujeito a inconvenientes obvios e só valerá a pena empregal-o para nos certificarmos de que não houve engano na primeira leitura. O registro das observações pode fazer-se do modo seguinte:

¹ Alguns theodolitos antigos (especialmente os francezes) são tambem repetidores no *vertical*. N'esse caso a manobra não offerece difficuldade, attendendo ao que fica dito.

Modelo n.º 5

Estação: Cabeço-ruivo (signal)

Data: 18 de setembro de 1873

Instrumento: Theodolito n.º 6

Observador: F.

PONTOS OBSERVADOS	ANGULOS DE ALTURA OU DEPRESSÃO		Altura ou depressão	ESCLARECI- MENTOS	Referencias do in- strumento
	Multiplos	Simples			
Monte Agudo (vertice da py- ramide)	0°. 52'. 30'' 1 . 18 . 40 1 . 44 . 55	0°. 26'. 10'' 15 13 14	D	Ponto de mira distincto. Ima- gem tranquilla.	$H = 2^m 53;$ $h = 4^m 37$
S. Gens, ermida (braço da cruz da frente)		4°. 0'. 15''	A	Idem.	
Pedras Altas (vertice da py- ramide)	3°. 0'. 40''	1°. 30'. 15'' 20	A	Ponto de mira distincto. Ima- gem ondulante. Vento fresco.	
etc.	etc.	etc.		etc.	

Este registro é de mui facil comprehensão. Quando fôr necessario, devem tomar-se as indicações do barometro e thermometro.

3.º Depois do que fica exposto, qualquer poderá mane-

jar os theodolitos de terceira classe. Os angulos azimuthaes são quasi sempre obtidos com um unico giro, e as direcções podem ser referidas ao meridiano magnetico por causa da bussola que acompanha estes instrumentos. Será comtudo prudente dirigir duas pontarias a cada ponto, uma com movimento progressivo e outra com elle retrogrado, para mutua verificação; e se apparecerem differenças inadmissiveis, deve ainda fazer-se terceiro giro. O registro d'estas observações é obvio: comtudo aqui damos um modelo:

Modelo n.º 6

Estação: Pedra Negra

Data: 26 de junho de 1874

Instrumento: Theodolito n.º 9

Observador: F.

PONTOS OBSERVADOS	DIRECÇÕES OU RUMOS	MÉDIAS	ESCLARECIMENTOS
S. Cosme (vertice da torre)	23°. 14'. 30'' 0	23°. 14'. 15''	
Paredes Velhas (pyramide)	97°. 20'. 0'' 30	97°. 20'. 15''	
Gesteira (Pyramide)	263°. 11'. 30'' 14 . 30 11 . 30	263°. 11'. 30''	Desprezou-se a segunda observação por discordante.
etc.	etc.	etc.	etc.

Se fôr necessario referir as observações a qualquer si-

gnal junto do instrumento, deve tomar-se o valor da direcção ao centro e o de r , distancia d'este.

Emquanto aos angulos verticaes medidos com estes theodolitos, só diremos que é conveniente ler sempre os dois nonios, quando o respectivo limbo constar de dois segmentos oppostos, e tomar a média das leituras, no principio e no fim. Por exemplo: se na origem os dois nonios indicarem respectivamente: $0^{\circ}. 0'. 0''$ e $0^{\circ}. 2'. 30''$, e na pontaria ao objecto... $5^{\circ}. 40'. 0''$ e $5^{\circ}. 44'. 0''$; teremos o angulo de altura ou depressão egual a $5^{\circ}. 42'. 0'' - 1'. 15'' = 5^{\circ}. 40'. 45''$. O principal trabalho n'este caso, consistirá na previa rectificação do instrumento.

20. Conclusão.—A pratica dos theodolitos, quando se não requer nos angulos um alto grau de precisão, é, como temos visto, extremamente facil. Qualquer pessoa pode, com poucas lições, executar os trabalhos relativos á topographia ou a outros serviços d'este genero; porém é certo que uma tal facilidade diminue espantosamente á medida que augmentar o rigor exigido. A exacta medição de um angulo tem merecido e hade merecer sempre a mais séria attenção de todos os geometras, porque é d'estas medições que depende, pela maior parte, o progresso da astronomia e geodesia. Só quem desconhecer estas sciencias, quem não souber os enormes embaraços que traz consigo qualquer medição altamente rigorosa, é que poderá considerar de pouca monta semelhantes trabalhos.

Dissemos já que o geometra pratico tinha a combater duas especies de erros na observação, uns *systematicos*, outros *fortuitos*. Uns e outros dependem do observador e do instrumento, porém a este é que são mais communs os primeiros. Se os erros *systematicos* podessem destruir-se ou eliminar-se totalmente, teriamos dado um passo gigantesco no progresso da geometria applicada, pois os erros *fortuitos*, como tambem já dissemos n'outro logar, attenuam-se de um modo progressivo á medida que fôr augmentado o numero das observações. Chegar-se-hia assim

a um grau de precisão quasi indefinido. Ora, posto que a imperfeição do homem seja uma eterna barreira na completa indagação de certos factos, assiste-lhe comtudo a faculdade de, em alguns, se approximar successivamente da verdade. É portanto necessario que o geometra pratico combata sempre as causas systematicas dos erros, por serem as mais perigosas na determinação dos elementos indispensaveis ao progresso da sciencia de que deve ser um desvelado cultor.

FIM

INDICE

	PAG.
INTRODUÇÃO.....	5

I

Principios geraes

1.—Fórma geometrica e classificação dos theodolitos.....	7
2.—Limbos.....	12
3.—Oculos.....	15
4.—Niveis.....	22
5.—Nonios.....	34
6.—Microscopios micrometricos.....	39

II

Erros intrumentaes e modo de corrigir, eliminar ou attenuar os seus effeitos na medição dos angulos

7.—Enumeração dos principaes erros no theodolito.....	46
8.—Defeitos na graduação dos limbos.....	49
9.—Defeitos na graduação dos niveis.....	52

	PAG.
10.—Defeitos nos microscopios micrometricos e nonios.....	59
11.—Excentricidade dos limbos.....	63
12.—Reacções dos parafusos ajustantes	67
13.—Flexão dos oculos.....	68
14.—Formulas para a determinação das direcções azimuthaes...	69
15.—Formulas para a determinação das distancias zenithaes ou das alturas.....	87
16.—Repetição e reiteração dos angulos.....	97

III

Pratica das observações com os theodolitos

17.—Considerações geraes e instalação dos instrumentos	103
18.—Das rectificações	107
19.—Processo systematico da medição dos angulos.....	119
20.—Conclusão.....	136

ERRATAS

Pag. 7; onde se lê *athmospherica*, deve ler-se *atmospherica*.

Pag. 27, linha 13; onde se lê *egual*, deve ler-se *paralela*.

Pag. 41, linha 17; onde se lê *suppondo* que *M*, deve ler-se *suppondo* que o tambor.

Pag. 74; onde se lê (fig. 30), deve ler-se (fig. 28).

Pag. 79, nota; onde se lê fig. 30, deve ler-se fig. 29.

Pag. 94; onde se lê *proxima 90°*, deve ler-se *proxima de 90°*.

Pag. 96; onde se lê *dos constructor*, deve ler-se *do constructor*.

Pag. 96; onde se lê *com alidade*, deve ler-se *com a alidade*.

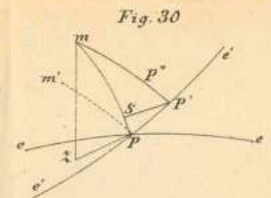
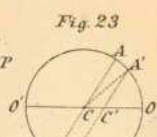
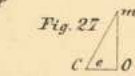
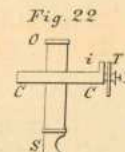
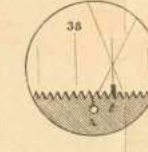
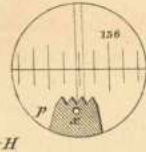
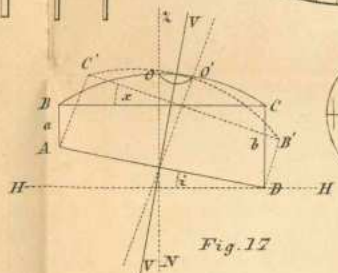
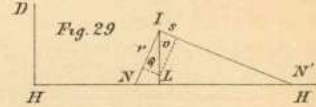
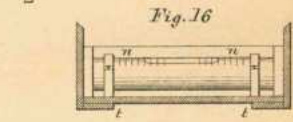
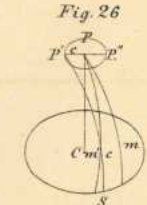
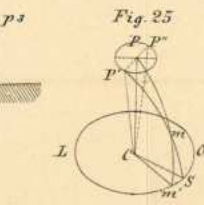
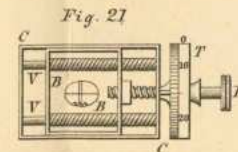
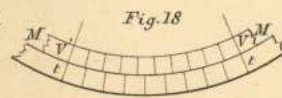
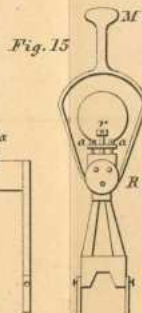
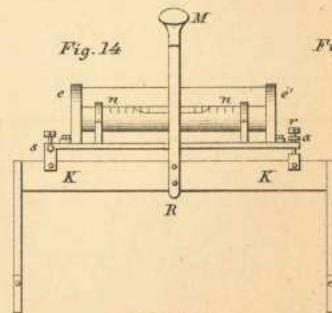
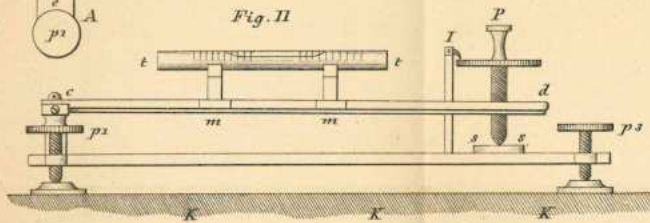
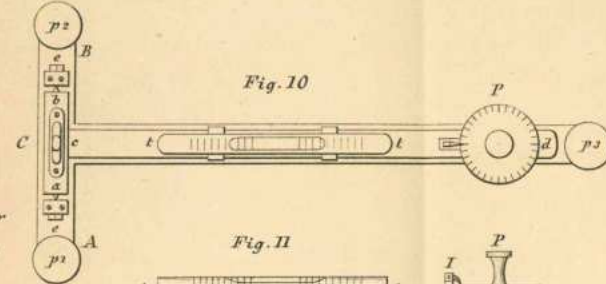
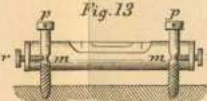
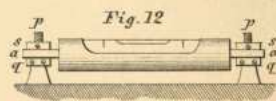
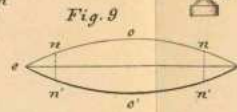
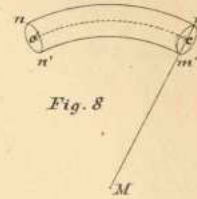
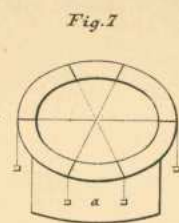
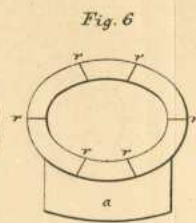
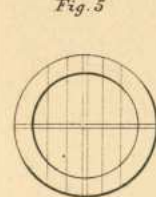
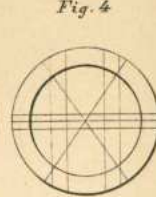
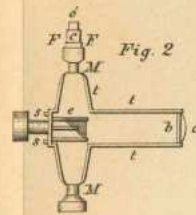
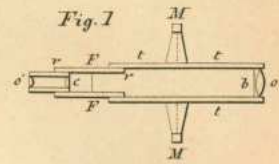
Pag. 101; onde se lê *indefenida*, deve ler-se *indifinida*.

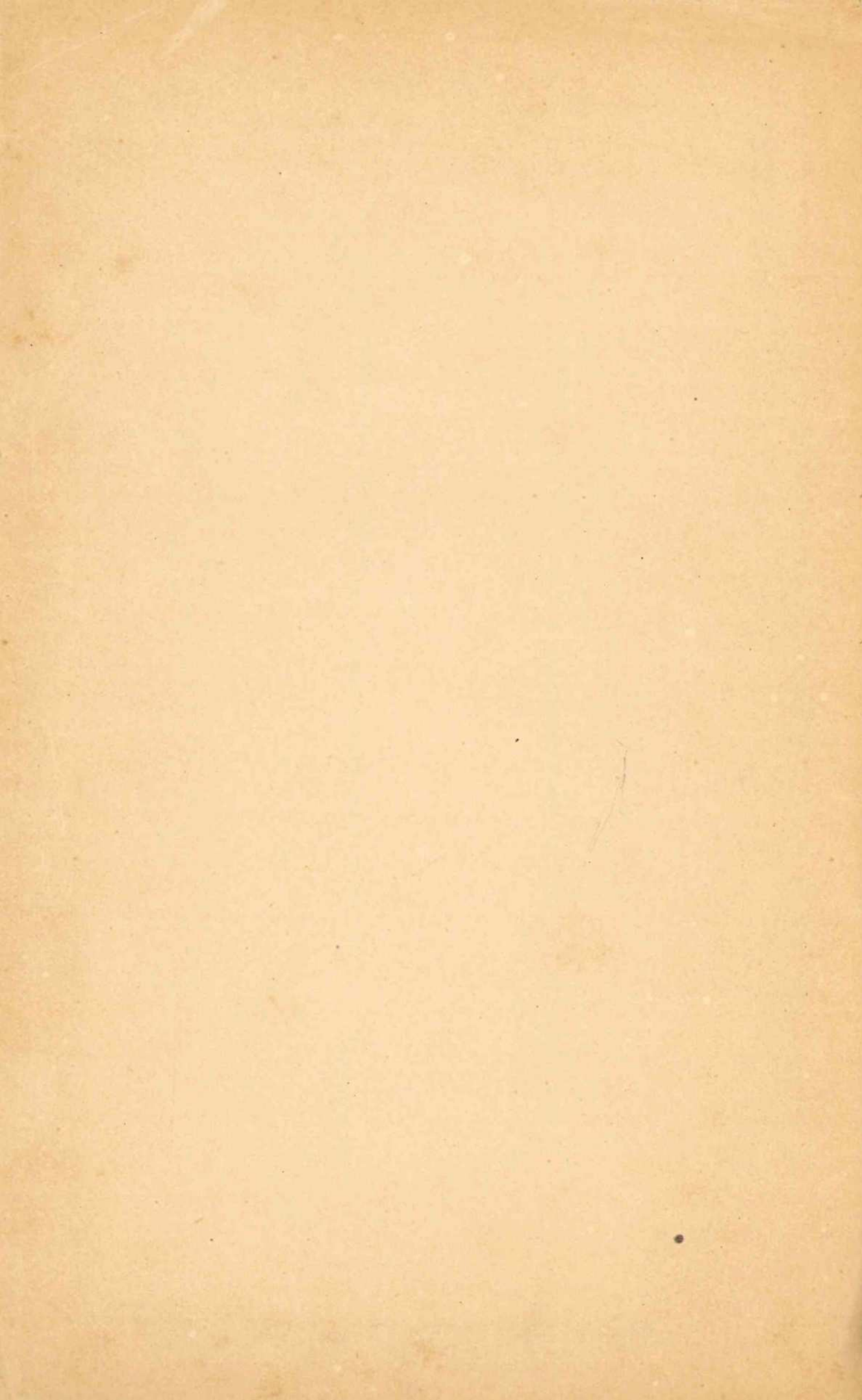
Pag. 110, linha 29; onde se lê *e verticalismo*, deve ler-se *o verticalismo*.

Pag. 125, linha 1; onde se lê *revoluções ou voltas*, deve ler-se *revoluções e partes de revolução*.

Pag. 125, linha 34, onde se lê *muito geographos*, deve ler-se *muitos geographos*.

Pag. 127, linha 10; onde se lê *effereçam*, deve ler-se *offereçam*.





biblioteca
municipal
barcelos



60688

Estudo sobre os theodolitos